Några ord om den analytiska geometrin och undervisningen däri.

Den analytiska geometrin är i våra skolor ett fullkomligt nytt fack, och det är därför intet att förundra sig öfver, om ofta äfven gamla rutinerade lärare stundom stå handfallna och hafva svårt att på ett klart sätt bibringa lärjungarna just de grundläggande principerna i denna vetenskap, om också dessa principer från deras universitetstid stå klara nog för dem själfva. Därtill kommer, att i våra vanliga läroböcker just dessa grundläggande satser behandlas synnerligen kort, och så att säga träda i skuggan för de många speciela satserna och tillämpningarna. *

Det har äfven ofta inträffat i författarens praktik, att elever, som något så när kunnat reda sig med ett vanligt problem ur denna vetenskap, likväl stått handfallna vid en sådan fråga som: "hvad vill det säga, att en viss ekvation föreställer en kurva?" eller "*hvarför* föreställer i allmänhet ett system af två ekvationer mellan tvänne obekanta en punkt?"

Det är därför undertecknads mening, att i denna uppsats, utan att inlåta sig på några detaljer, hvilka finnas tillräckligt utförda i alla läroböcker, redogöra för den metod, som han plägar använda för att få eleven att erhålla en riktig och klar föreställning om den analytiska geometrins grundbegrepp; och äro dessa en gång rätt fattade, så tro vi att svårigheterna af allt det öfriga skall reducera sig till en ren obetydlighet i jämförelse med hvad de äro för den elev, af hvilken grunderna äro vagt och obestämdt fattade.

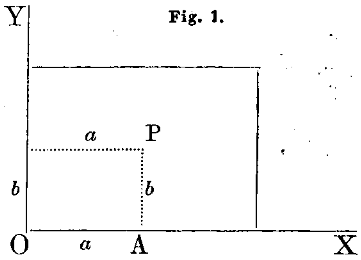
Likasom i allmänhet studiet af den analytiska geometrins grunder hälst bör gå hand i hand med studiet af differentialkalkylens första begrepp, så vore det mig en stor lättnad om jag finge förutsätta, att läsaren af denna lilla uppsats förut hade tagit kännedom om en föregående: "Om det oändligt stora och det oändligt lilla" (Ped. Tidskr. 1882 sid. 357—370); men då väl detta i allmänhet ej torde kunna förutsättas, så skall jag bemöda mig om att så litet som

* Sedan denna uppsats skrefs, har i bokhandeln utkommit en ny svensk lärobok i detta ämne: Lärobok i plan analytisk geometri af lektor M. Falk, hvilken måhända något utförligare än vanligt i kapitlet "om geometriska orter" behandlar dessa grunder. Dock söker den ej att i sammanhang härmed tydligt definiera variabelbegreppet och betrakta koordinaterna framför allt från synpunkten af variabler, hvilket just är hufvudtanken i föreliggande uppsats.

möjligt hänvisa därtill, och åter upptaga definitioner som där äro gifna.

Om vi stå vid kanten af en fyrkantig, rätvinklig damm och skola beskrifva, på hvilken punkt af denna damm ett litet föremål sjunkit, så kunna vi därvid gå till väga på många olika sätt: vi kunna t. ex. utpeka en punkt på stranden och säga: "midt för denna punkt så och så många fot utåt" eller "så många fot från denna strand och så och så många från den däremot vinkelräta" eller utpeka de två punkter på stränderna "midt för" hvilka föremålet sjunkit o. s. v. Undersöka vi nu alla dessa skenbart olika metoder att bestämma läget af en punkt, så skola vi lätt med tillhjälp af den euklideiska satsen om sidorna i en parallelogram se, att de i själfva värket reducera sig till en enda: vi hafva nämligen antagit läget af en viss punkt (ett af dammens hörn) och tvänne mot hvarandra vinkelräta linier (dammens genom detta hörn gående sidor) såsom till sitt läge bekanta, och bestämma sedan hvarje punkt genom dess båda *"rätvinkliga koordinater"*, d. v. s. dess *vinkelräta afstånd* från de båda linierna. Uttrycket "midt för en punkt" betyder naturligen intet annat än "på den mot stranden vinkelräta linie, som går genom denna punkt"; genom att säga, att föremålet sjunkit midt för punkten A på linien OX har jag således blott sagt, att dess vinkelräta afstånd från linien OY är lika med linien OA o. s. v.

Fig. 1.



Om man således öfverenskommer att benämna en punkts afstånd från OY hans *"x-koordinat"* eller *"abscissa"* och hans afstånd från OX hans *"y-koordinat"* eller *"ordinata"*, så kunna vi angifva läget af en punkt hvilken som hälst genom att bestämma storleken af hans båda koordinater. Således är läget af en punkt P bestämdt, om man säger att hans koordinater satisfiera t. ex. följande *eqvationer:*

$$\begin{cases} x = a \\ y = b, \end{cases}$$

där vi hafva att med a och b förstå gifna tal med någon viss enhet t. ex. fot, meter o. s. v.

Men om vi med a och b blott förstå våra positiva tal, så skulle på detta sätt blott de punkter kunna utmärkas, som ligga inom vinkeln XOY. För att då kunna på samma sätt beteckna punkterna inom de öfriga tre kvadranterna af planet, behöfves blott att man utdrager XO och YO förbi O och tänker sig en punkts koordinater försedda med plus- eller minustecken. Den punkt, som har en negativ x-koordinat, ligger då till vänster om OY och den, hvars y-koordinat är negativ, ligger nedanför OX. *

Vi hafva således funnit, att om a och b äro gifna positiva eller negativa tal, samt koordinatsystemet XOY och längdenheten en gång för alla gifna, så definieras alltid *en* och *endast en* punkt genom de båda samtidiga ekvationerna

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$$

Detta system föreställer nämligen just den punkt, hvars abscissa (x-koordinat) är a och hvars ordinata (y-koordinat) är b.

Men om denna punkt är framställd genom detta system, så är det ju äfven tydligt, att den likaväl framställes af hvarje annat system, som är fullkomligt ekvivalent med detta, d. v. s. af hvarje ekvationssystem, hvars lösning utgöres af systemet (1) t. ex.

$$(2,3) \quad \ldots \begin{cases} x + y = a + b \\ x - y = a - b \end{cases} \;\ldots\text{ eller }\ldots \begin{cases} mx + ny = ma + nb. \\ px + qy = pa + qb. \end{cases}$$

Det förra af dessa system kan ju nämligen ordagrant öfversättas på svenska sålunda: "Summan af abscissan och ordinatan för en punkt skall vara a + b, men skilnaden dem emellan skall vara a — b", och då veta vi ju ur algebrans elementer, att denna punkts abscissa nödvändigtvis är a och dess ordinata b, och att således systemet (2) eller systemet (3) nödvändigt har samma geometriska betydelse som systemet (1), likasom de ju äfven i algebran anses fullkomligt ekvivalenta.

Vi hafva således nu fått klart för oss, att hvarje sådant ekvationssystem, hvars enda lösning är ett system af formen (1), då a och b betyda reela kvantiteter hvilka som hälst, alltid betyder *en punkt* i planet. Men om vi eftertänka hvad det vill säga, att systemet (1) är den enda *lösningen* af vårt

* Om man vill redan på detta stadium införa polära koordinater, så sker detta enkelt genom följande betraktelse:

Om man i st. f. vid en damm står vid stranden af ett öde haf och vill fixera en punkt, så skall man i allmänhet beskrifva den genom att säga: "så och så många fot ut i den riktningen". Här har man uppenbarligen tagit sin egen ståndpunkt till origo och stranden till begynnelselinie och användt polära koordinater. Däremot gifva de snedvinkliga och de trilinära koordinaterna sig ej så enkelt för den omedelbara åskådningen.

system, så betyder detta ju endast, att om vi i det senare för x insätta a och för y insätta b, så blir systemet *identiskt satisfieradt*, hvilket det ej blir för något annat system af värden på x och y. Vi inse således, att vi såsom den klaraste och skarpaste definition kunna uppställa följande:

Ett ekvationssystem mellan x och y föreställer en punkt P, om denna punkts koordinater, men inga andra, insatta för x och y i systemet, identiskt satisfiera detta.

Och fullkomligt analogt härmed kunna vi nu äfven uppställa följande definition:

Ett ekvationssystem mellan x och y föreställer en samling punkter, om alla dessa punkters koordinatpar, men inga andra, insatta för x och y i systemet, identiskt satisfiera detta.

Dessa båda definitioner innehålla så att säga "in ovo" hela den elementära analytiska geometrin, så att man nästan kan säga, att allt det följande ej är annat än tillämpningar af dessa satser. Vi vilja emellertid med detsamma göra läsaren uppmärksam på, att de i själfva verket innehålla något mer än hvad den föregående utvecklingen gifver vid handen. I det föregående har nämligen talats om, att systemet

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

skulle vara *den enda lösningen* till vårt ekvationssystem, men i definitionerna blott därom att detta *koordinatpar* och intet annat skulle satisfiera systemet, lämnande därhän, huruvida det existerar lösningar, som ej äro koordinatpar, det vill säga imaginära lösningar, eller ej; så att vi ur definitionerna omedelbart kunna draga följande korollarium:

I den analytiska geometrin betraktas alla sådana lösningssystem, där endera värdet eller båda äro imaginära, såsom icke existerande. Så t. ex. föreställer systemet

$$\begin{cases} (x - a)(x^2 + 1) = 0 \\ (y - b)(y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

endast den punkt, hvars koordinater äro a och b [tecknas: punkten (a, b)], emedan intet annat *reelt* lösningssystem är möjligt : sådana lösningssystem som

$$\begin{cases} x = a \\ y = i, \end{cases} \quad \begin{cases} x = i \\ y = b \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = i \\ y = i \end{cases}$$

betraktas helt enkelt såsom icke existerande, då de ej föreställa några koordinatpar.

Innan vi nu gå vidare och utdraga konsekvenserna af våra definitioner, måste vi för att lättare kunna röra oss med uttryck innehållande våra koordinater x och y, se dessa från en något annan synpunkt, i det att vi återupptaga några definitioner, som i annan form äro gifna i den föregående uppsats, till hvilken vi i början hänvisat.

I algebran hafva vi lärt oss att handskas med bokstäfver, som kunde betyda hvilka tal som hälst, men dock med den inskränkningen, att de under räkningens lopp alltid betydde samma tal. Här komma vi nu att åt vissa af våra bokstäfver, nämligen just de förut omnämda x och y, gifva en något annan betydelse, i det att vi låta dem vara "*variabla*", d. v. s. vi tänka dem ej såsom sittande fast på ett visst, om ock obekant eller obestämdt, ställe af talsystemet, utan vi tänka oss dem såsom *genomlöpande* hela det reela talsystemet så att de inom detta kunna variera hur som hälst. Nu veta vi, att vi ej i algebran kunna genom en ekvation sammanknyta *en* obestämd konstant med blott bestämda tal, siffror, utan att den förra förlorar sin karaktär af att kunna betyda hvad tal som hälst, så att om vi t. ex. sätta

$$a + 2 = 3,$$

så är a ej längre hvad tal som hälst, utan blir just det fullt bestämda talet 1, men om vi däremot sätta t. ex.

$$a + 2 = b,$$

så kunna a och b väl behålla sin karaktär af att vara obestämda, vi hafva blott knutit a:s och b:s värden vid hvarandra på ett visst sätt. På samma sätt kunna vi ej häller vid kalkyl med variabla storheter (s. k. högre kalkyl, se ofvan citerade uppsats!) medels en ekvation förena *en* dylik storhet med idel konstanta, utan att den förlorar sin egenskap af variabel. Det är ju t. ex. orimligt, att om ekvationen

$$x + 2 = a$$

skall ega bestånd, x kan genomlöpa talsystemet medan a är fäst på en viss punkt. Om vi således vilja indraga dessa variabla kvantiteter i våra räkningar, hvarvid ju tydligen alltid ekvationer måste användas, så måste vi alltid använda minst tvänne variabler, hvilkas variationer därigenom ej omöjliggöras, utan blott bindas vid hvarandra. Om jag t. ex. skrifver

$$y = x + 2,$$

så kan denna ekvation alltid vara satisfierad huru x än rör sig, om blott y samtidigt rör sig så, att det alltid är två enheter större. Hvarje uttryck, som innehåller en eller flera sådana variabla kvantiteter och således förändrar sitt värde när dessa variera, kallas en *funktion* af dem. Om således ofvanstående ekvation är sann, så är y en funktion af x, ty det är ju alltid lika med x + 2. Om man vill utmärka, att y är en funktion af x utan att särskildt omtala *huru* den ekvation ser ut, som gör den till en sådan, utan blott framhålla, *att* någon sådan ekvation existerar, så skrifver man

$$y = f(x),$$

hvarest således $f(x)$ betyder en obestämd, men dock under räkningens gång alltid samma, funktionsform. Olika funktionsformer utmärkas med f från olika alfabet och stilar med eller utan indices i nedre kanten t. ex.

$$f(x),\ f_1(x),\ F(x),\ \varphi(x) \text{ m. fl.}$$

På samma sätt betyder naturligen

$$f(x, y)$$

ett uttryck, som innehåller de båda variabla kvantiteterna x och y. Såsom specialfall häraf kan emellertid äfven betraktas det fall, att den ena af dessa kvantiteter ej förekommer i uttrycket, då det öfvergår till ett sådant som det föregående. En ekvation som ej innehåller några andra variabler än x och y kan således alltid skrifvas:

$$F(x, y) = 0,$$

hvilken ekvation sedan kan tänkas löst antingen med afseende på y eller med afseende på x, och då ger resultat af formen

$$y = f_1(x) \quad \text{eller} \quad x = f_2(y).$$

Sålunda i besittning af de viktiga begreppen "variabel" och "funktion", vilja vi nu återgå till våra definitioner sid. 100 och efterse hvilka olika slag af ekvationssystem mellan koordinaterna x och y här kunna komma i fråga.

Först inse vi då utan svårighet den sats, att *hvarje "orimligt" ekvationssystem, d. v. s. hvarje sådant system, däri en ekvation rent af motsäger de öfriga, ej kan hafva någon geometrisk betydelse*, ty (se def. sid. 100) intet koordinatpar kan satisfiera det.

Vidare utesluta vi ur våra undersökningar alla sådana ekvationssystem, hvari en ekvation kan fås ur de öfriga, enär ett sådant alltid kan reduceras till ett annat med mindre antal ekvationer. Om vi således t. ex. i det följande tala om ett system af två ekvationer, så förstå vi därmed alltid ett system af två *af hvarandra oberoende* ekvationer, ty om de kunna härledas ur hvarandra, så betyder systemet uppenbarligen detsamma som ett system af blott en ekvation.

På alldeles liknande grunder utesluta vi sådana ekvationssystem, *som följa af* ett system med färre ekvationer, såsom t. ex. systemet

$$\begin{cases}(x-a)(y-b)=0\\(x-a)(x-c)=0.\end{cases}$$

Dessa båda ekvationer äro nämligen en nödvändig följd af den enda ekvationen

$$x-a=0.$$

Nu veta vi ur algebran, att hvarje system af *mer än två* ekvationer mellan endast x och y alltid måste höra till någotdera af de nämda slagen. Om systemet således ej hör till de af oss uteslutna slagen, så veta vi således alltid att

ett sådant system har ingen geometrisk betydelse.

Återstår således blott att undersöka system af två ekvationer och sådana af blott en enda. De förra hafva vi på sätt och vis redan undangjort. Vi veta nämligen ur algebran, att om vi hafva ett ekvationssystem

$$\begin{cases}F_1(x, y)=0\\F_2(x, y)=0,\end{cases}$$

som äro förenliga och af hvarandra oberoende, så utgöres lösningen till dessa af ett ändligt eller oändligt antal värdepar:

$$\begin{cases}x=a_1\\y=b_1\end{cases},\quad\begin{cases}x=a_2\\y=b_2\end{cases}\ldots\ldots,\quad\begin{cases}x=a_n\\y=b_n\end{cases}\ldots\ldots,$$

det vill säga, att alla dessa värdepar (a_ν, b_ν), men inga andra, insatta för x och y i ekvationerna, reducera dessa till identiteter. Om nu något eller några af dessa värdepar hafva båda sina värden reela, så kan ju detta eller dessa värdepar äfven föreställa koordinatpar, och de punkter, som hafva dessa koordinatpar, äro då enligt ofvannämda definitioner just de som föreställas af ekvationssystemet.

Ett system af två oberoende ekvationer mellan x och y kan sålunda föreställa ingen, en, flera eller oändligt många punkter.

Anmärkas bör, utan att här något bevis därför kan lämnas, att vid alla våra vanliga funktionsformer dessa möjliga oändligt många punkter dock aldrig kunna bilda någon kontinuerlig linie, huru liten den än må vara. *

* Det är att märka, att med den definition af funktion, som här är gifven, intet generelt härom kan uttalas. Att upptaga de nyare funktionsdefinitionerna torde på detta stadium vara olämpligt för att ej säga omöjligt.

Såsom exempel på de ofvan nämda möjliga fallen kunna nämnas:

Systemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

föreställer ingen punkt, emedan alla lösningssystem äro imaginära. Systemet

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ (x^2 + a^2)(y - b) = 0 \end{cases}$$

föreställer *en* punkt (a, b). Systemet

$$\begin{cases} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0 \\ (x - p)(y - q) = 0 \end{cases}$$

föreställer de fyra punkterna (a, q), (—a, q), (p, b), (p, — b). Systemet

$$\begin{cases} \sin \frac{1}{x} = 0 \\ y = a \end{cases}$$

slutligen, framställer alla punkter, hvarest x är $= \frac{1}{n\pi}$ och y = a, hvad n än må vara, således oändligt många, hvilka väl packa sig oändligt tätt i närheten af en punkt, men dock ingenstädes bilda en sammanhängande linie.

Vi hafva nu således sett betydelsen af alla system af mer än en ekvation, och öfvergå nu till den analytiska geometrins egentliga kärnpunkt: betydelsen af en enda ekvation innehållande x och y jämte konstanta, bekanta kvantiteter. Det är äfven naturligt, att de resultat vi då få, äfven skola sprida ett nytt ljus öfver det föregående: betydelsen af ekvationssystem, emedan sådana system ju bestå af flera ekvationer, blott underkastade det vilkor, att de samtidigt skola vara gällande.

Den fråga, vi nu skola behandla, är således följande: Hvilken geometrisk betydelse har en ekvation af formen

$$F(x, y) = 0?$$

Svaret på denna fråga skall naturligtvis, likasom allt annat i den analytiska geometrin tagas ur definitionerna sid. 100, men dessförinnan vilja vi anställa några betraktelser öfver denna ekvations rent algebraiska natur.

Vi veta då, att om vi, såsom i algebran är vanligt, betrakta x och y såsom obekanta kvantiteter, hvilkas värden skola bestämmas, så låter ekvationen egentligen ej lösa sig. Vi kunna gifva x ej blott ett ändligt eller oändligt antal värden, utan rent af hvad värde som hälst, och dock alltid finna ett y, så att det funna värdeparet satisfierar ekvationen identiskt. Likaså kan jag först godtyckligt välja mitt y och sedan finna ett motsvarande x. Men detta vill just säga, att ekvationen egentligen ej är en "bestämmande likhet", vi få ej däri betrakta x och y såsom obekanta kvantiteter, som skola till sitt värde bestämmas, de äro snarare fullkomligt obestämda eller rättare *variabla*, som få genomlöpa hela talsystemet, under det att ekvationen blott binder de båda variablernas variationer vid hvarandra, eller med andra ord: ekvationen gör y till en funktion af x eller x till en funktion af y. Ekvationen knyter således ihop *hvarje* värde å x med ett (eller flera) bestämda värden på y.

Om vi då betänka, att ekvationen enligt definitionen på sidan 100 skall föreställa alla de punkter, hvilkas koordinatpar, insatta för x och y, reducera ekvationen till en identitet, så inse vi lätt, att den (om vi bortse från möjligheten af imaginära värden) måste föreställa en hel serie af punkter, nämligen en för hvarje reelt värde på x, således *alla punkter på en hel linie.*

Genast bör dock anmärkas, att vi därvid måste taga uttrycket "linie" något generelare än vi vanligen äro vana. Särskildt få vi ej fästa oss vid ordet *en* linie. Det är ju nämligen uppenbart, att om t. ex. linien AB (fig. 2) föreställes af ekvationen

$$f_1\,(x, y) = 0$$

och linien CD af ekvationen

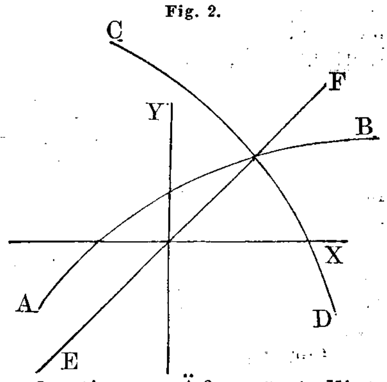
$$f_2\,(x, y) = 0\,,$$

så föreställer ekvationen

$$f_1\,(x, y) \cdot f_2\,(x, y) = 0$$

en linie, som är sammansatt af både AB och CD, ty då koordinatparet för hvarje punkt, som ligger på hela den sammansatta linien, satisfierar en af de båda första ekvationerna, så måste de äfven alla satisfiera den sista ekvationen. Äfven är tydligt, att denna senare ej satisfieras af några andra punkter. Lika litet få vi hålla på ordet en *hel* linie, om vi därmed skulle vilja förstå, att linien skulle antingen genomskära hela planet eller sluta sig i sig själf. Härvid är nämligen, såsom lätt inses, alla möjliga oregelbundenheter tänkbara. Om t. ex. ekvationen är sådan, att den för vissa värden på x blott tillåter imaginära värden på y, så saknas alla sådana punkter i den "hela" linien, ja det är t. o. m. möjligt, att y kan

Fig. 2.



blifva imaginär för *alla* reela värden på x eller för alla sådana med undantag af ett eller flera spridda värden. I förra fallet reduceras uppenbarligen kurvan till ingenting, i senare fallet till en eller flera spridda punkter. Såsom exempel på det förra kan angifvas:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

och på det senare

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Det är ju uppenbart, att den förra af dessa ekvationer ej satisfieras af någon enda punkts koordinater, och den senare endast af den punkt, hvars koordinater äro (0,0). Taga vi däremot en sådan ekvation som

$$x - y = 0,$$

så få vi tydligen en hel linie, ty denna ekvation måste ju föreställa hvarje punkt, hvars afstånd från OY är till storlek och tecken lika med dess afstånd från OX, således hela linien EF (fig. 2).

Vi hafva således erhållit följande resultat:

En ekvation mellan x och y föreställer en linie (rättare: *alla punkter på en linie*), *hvilken dock i speciela fall kan öfvergå till blott spridda punkter eller ingenting.*

En sak måste emellertid ännu här anmärkas. Sid. 102 hafva vi anmärkt, att det ej är ovilkorligen nödvändigt att i ett uttryck, som tecknas

$$F(x, y),$$

just båda kvantiteterna x och y värkligen förekomma, men vid undersökningen af betydelsen af ekvationen

$$F(x, y) = 0$$

hafva vi hela tiden förutsatt, att den värkligen gör y till en funktion af x och x till en funktion af y, hvilket ej i egentlig mening är fallet, där endera variabeln saknas. Det återstår oss således ännu att undersöka dessa specialfall, och naturligen måste härvid åter den viktiga definitionen å sid. 100 vara oss behjälplig.

Om vi först tänkte oss, att ingendera af variablerna värkligen förekomme i ekvationen, så utgjorde denna en relation mellan idel bekanta och konstanta kvantiteter, och vore därför uppenbarligen antingen en orimlighet eller en ren identitet, antingen en sådan relation som

$$2 = 0$$

eller en sådan som

$$0 = 0.$$

I förra fallet kan naturligen ingen punkts koordinater satisfiera ekvationen, i senare fallet är den satisfierad hvilket koordinatpar jag än insätter för x och y (som i själfva värket ju alls ej ingå). I förra fallet föreställer ekvationen således ingenting, i senare fallet hela planet. Sådana ekvationer äro dock naturligen af ingen vikt i geometrin. Långt viktigare äro då sådana ekvationer, däri blott den ena variabeln ingår, och vi vilja undersöka dessas betydelse. Om t. ex. y är den variabel, som saknas, så blir ju ekvationen af formen:

$$f(x) = 0.$$

Men enär en sådan ekvation existerar, så kan x ju (enligt det föregående) ej längre variera, utan måste vara en eller flera konstanter: ekvationens s. k. rötter. Däremot kan jag alltid fortfarande tänka mig y (som icke förekommer i ekvationen) såsom fortfarande variabelt, och dess variation är naturligen oinskränkt. Alltså satisfieras ekvationen af alla de punkter, hvilkas afstånd från y-axeln (x-koordinat) är en rot till ekvationen, hvad än deras y-koordinater må vara, men af inga andra; och den framställer således lika många *med y-axeln parallela räta linier* som ekvationen har reela, olika rötter.

På samma sätt framställer naturligen en ekvation af formen

$$\varphi(y) = 0$$

en eller flera med x-axeln parallela räta linier. Särskildt kan anmärkas, att axlarna själfva naturligen framställas resp. af ekvationerna

$$y = 0 \text{ och } x = 0.$$

Härmed skulle vi nu kunna sluta, då vi redogjort för hela den generela plana analytiska geometrins innehåll och kunde hänvisa till de vanliga läroböckerna för de speciela tillämpningarna af dessa grundsatser, men för att sprida ljus öfver det föregående vilja vi dock ännu anföra några generelare exempel, som beröra det som uppkommer då sådana uttryck som förut äro omtalade, kombineras med hvarandra på olika sätt.

Vi antaga därför, att vi hafva flera olika kurvor c_1, c_2, c_3 . . . . . . gifna genom respektive ekvationerna:

$$f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, f_3(x, y) = 0 \ldots\ldots$$

Vi hafva då redan sett, att ekvationen

$$(4) \ldots\ldots\ldots f_1(x, y) . f_2(x, y) = 0$$

betyder den kurva, som utgör sammanfattningen af kurvorna

c_1 och c_2. Denna ekvation är således liktydig med de båda ekvationerna

(5, 6) . . . . $f_1 = 0$ och $f_2 = 0$,

men, väl att märka, ej förenade till ett ekvationssystem, ej *samtidigt* gällande, utan så att säga *alternativt* gällande: en punkt, som ligger på kurvan (4), ligger ej på *båda* kurvorna (5) och (6), utan *antingen* på (5) *eller* (6). Om vi däremot förena ekvationerna (5) och (6) till *ett system*, det vill säga antaga, att de samtidigt måste gälla, och fråga efter den geometriska betydelsen af detta *system*, så fås naturligen svaret omedelbart ur definitionerna på sidan 100: det föreställer alla de punkter, hvilkas koordinater *samtidigt* satisfiera (5) och (6), det vill säga de punkter, som ligga på *båda* kurvorna c_1 och c_2, eller med andra ord: det representerar dessa båda kurvors alla skärnings- och tangeringspunkter.

Se vi nu tillbaka på uppsatsens början, huru vi i allmänhet representera en punkt, så finna vi, att den ju skulle representeras medels ett system af två ekvationer, hvilka ju kunde väljas på oändligt många olika sätt, helt enkelt emedan en punkt kan betraktas såsom skärningspunkt emellan oändligt många olika slag af kurvor. Om vi särskildt betrakta det enklaste sätt att framställa en punkts ekvationer, nämligen systemet

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} x = a \\ y = b, \end{cases}$$

så består detta helt enkelt däri, att man angifver punkten såsom skärningen mellan tvänne räta linier, som äro parallela med hvar sin af axlarna (enl. sidan 107), hvilket ju äfven helt och hållet öfverensstämmer med våra betraktelser i början, hvarest vi för att bestämma läget af en punkt på ytan af en rätvinklig damm uppdrogo linier vinkelräta mot sidorna.

Äfven framgår häraf anledningen till det ofvan anförda fenomenet, att ett system af två ekvationer ej alltid föreställer en och blott en enda punkt, såsom fallet var, om ekvationerna angåfvos såsom i (7). Om vi nämligen uppgifva linier, som icke just äro räta, så är det ju mycket väl möjligt, att de ej alls skära hvarandra eller skära hvarandra i flera punkter.

Likaså se vi, hvarför vi från våra betraktelser måste utesluta sådana ekvationssystem, hvars ekvationer kunde härledas ur hvarandra eller ur ett mindre antal sådana. Om vi nämligen hafva t. ex. ekvationerna:

$$\begin{cases} f_1(x, y) . f_2(x, y) = 0 \\ f_1(x, y) . f_3(x, y) = 0 \end{cases}$$

så hafva ju de kurvor som af dem föreställas, ej blott skärnings*punkter*, utan hela kurvan c_1 [$f_1(x, y) = 0$] gemensam.

Om tre kurvor skära hvarandra i samma punkt, så är ju skärningspunkten redan bestämd genom två af dem, och den tredje måste uppfylla vissa vilkor för att äfven gå därigenom, hvilket vilkor i ekvationen tydligen måste uttryckas därigenom, att den tredje kurvans ekvation ständigt måste vara satisfierad i en punkt, där de båda föregåendes samtidigt äro det, ty om så ej är fallet, så ligger ju ej dessas skärningspunkt på henne, men då äro, såsom vi veta, ekvationerna aldrig fullt oberoende af hvarandra, utan måste följa ur ett mindre antal än tre. Detta är orsaken, hvarför ett system af tre af hvarandra oberoende ekvationer ej har någon geometrisk betydelse.

Om jag således vill skaffa mig ett uttryck för en kurva, som går genom alla skärningspunkterna till de båda kurvorna

$$f_1(x, y) = 0 \text{ och } f_2(x, y) = 0,$$

så kan detta ske genom att sätta

$$k_1 . f_1(x, y) + k_2 . f_2(x, y) = 0,$$

hvarest k_1 och k_2 antingen äro konstanter eller funktioner, blott med det vilkor, att de ej blifva oändligt stora när f_1 och f_2 äro noll; ty detta uttryck måste ju alltid vara satisfieradt af alla punkter som göra såväl f_1 som f_2 till noll; d. v. s. den kurva, som ekvationen föreställer, går genom de båda andras skärningspunkt.

Detta sista exempel är i själfva verket detsamma som t. ex. i Lindelöfs analytiska geometri framställes i en specielare form under rubriken "förkortadt beteckningssätt", blott med den skilnad, att denne i stället för funktionsmärkena f_1, f_2 o. s. v. har användt godtyckligt valda bokstäfver L, L', A m. fl., hvilket plägar göra nybörjaren svårigheter.

Mången torde måhända finna, att ofvanstående utveckling af den analytiska geometrins grundbegrepp är något för abstrakt för att vara rätt fattbar för begynnaren, men då just dessa svårigheter med att fatta kvantiteterna som variabla m. m. dock nödvändigt måste öfvervinnas, så hafva vi ansett, att det kan vara så godt "att hoppa i som att krypa i", och att det är bättre att genast i början för lärjungen klart utveckla de svårigheter, som förefinnas, än att så att säga gömma undan dem för honom, då i alla fall allt, hvad han dessförinnan lär sig, blott blir halfbegripet, i synnerhet som ju på ett så högt stadium, som där den analytiska geometrin läses, meningen ju ej kan vara att bibringa eleven en mekanisk färdighet, utan egentligen är att gifva honom en inblick i den högre matematikens natur och väsende.

Ad. Meyer.

O. V. Lemke, Öfversigt af de bibliska böckernas innehåll och historia. *Till tjänst för de högre läroverken och för femklassiga läroverk. Stockholm, A. V. Carlsons förlag 1886. 88 sidor mindre oktav. Pris häft. 60 öre, kart. 80 öre.*

F. Landahl, Den heliga historien och de heliga böckerna *i kortaste sammandrag till skolornas tjänst. Mariestad, P. V. Karström 1886. 39 sidor 8:o. Pris 40 öre.*

I gällande stadga för de allmänna läroverken finnes, som bekant, en föreskrift, att i fjärde och femte klasserna skall meddelas "en kort öfversikt af de bibliska böckernas innehåll jämte underrättelser om deras författare". Olika meningar hafva gjort sig gällande om den rätta tillämpningen af denna föreskrift. En del hafva fattat den fullt bokstafligt och redogöra för hvarje boks innehåll för sig utan att taga hänsyn till, hvilken betydelse den särskilda boken har såsom en organisk länk i den gudomliga uppenbarelsen. Andra uppställa den fordran, att öfversikten öfver bibelns böcker bör meddelas under formen af en helig historia. De mena, att ingen bok blir rätt uppfattad, så vida icke hennes ställning i den gudomliga uppenbarelseserien blir fullt klargjord. Utan tvifvel hafva dessa rätt. Kunskapen om bibelns böcker, meddelad i denna form, skulle säkerligen blifva både intresseväckande och fruktbringande, både djup och allsidig. Man måste dock reducera sin uppgift till en rimlig omfattning och särskildt taga tvänne omständigheter med i räkningen. Den ena af dessa är lärjungens oförmåga att på ett djupare sätt tränga i den heliga historiens väsen, och den andra bristen på tid. Om man tillräckligt beaktar dessa omständigheter, torde man nog finna det riktiga vara att låta de båda anförda meningarna ingå ett slags kompromiss, så att öfversikten öfver böckernas innehåll blir hufvudsaken, men att på samma gång alla viktigare tilldragelser få framstå i sin betydelse såsom länkar i den gudomliga ekonomien med mänskligheten.