DEN GRUNDLÄGGANDE MATEMATIKUNDERVISNINGEN

ÖVERSIKT AV FOLKSKOLANS KURS I RÄKNING
OCH GEOMETRI UR METODISK SYNPUNKT

AV

FRITS WIGFORSS

STOCKHOLM
A.-B. MAGN. BERGVALLS FÖRLAG

STOCKHOLM 1925
IVAR HÆGGSTRÖMS BOKTRYCKERI AKTIEBOLAG

Översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt.

FÖRSTA AVDELNINGEN.

Matematikundervisningens i folkskolan mål och allmänna beskaffenhet.

§ 1. **Matematikundervisningens mål.**

Målet för undervisningen i matematik såväl som i skolans andra ämnen kan ju sägas vara dels att bibringa barnen vissa värdefulla kunskaper och dels att påverka deras själskrafter i god riktning.

Barnen skola i detta ämne först och främst bibringas de matematiska kunskaper, som erfordras för lösning av sådana enkla aritmetiska och geometriska uppgifter, som flertalet personer behöva kunna lösa. Härtill krävcs förståelse av de vanliga talen (hela tal och bråk) och taloperationerna (de s. k. fyra räknesätten) samt färdighet att använda dem i såväl huvudräkning som skriftlig räkning. I samband med problemlösningen böra barnen dessutom erhålla kunskap om en mängd betydelsefulla fakta inom olika områden av verkligheten, varför stor omsorg bör ägnas åt räkneuppgifternas sakinnehåll.

Matematikundervisningens möjligheter att påverka elevernas tanke- och viljeliv måste anses betydande. Knappast något av skolans andra ämnen torde så bra kunna befordra tankens reda och klarhet. Det måste därför betraktas som en väsentlig uppgift för matematikundervisningen att verka bildande på eleverna i logiskt avseende.

Några allmänna krav på matematikundervisningen.

§ 2. Det tillhör den allmänna metodiken att behandla frågan om hur undervisningen i allmänhet bör vara beskaffad, men det synes dock lämpligt att här diskutera några för matematikundervisningen särskilt betydelsefulla punkter.

Då tankens skolning är en huvuduppgift för undervisningen i matematik, följer därur, att begripandet av kunskapsstoffet energiskt måste eftersträvas, och att mekaniseringen ej bör sträcka sig längre än som verkligen är nödvändigt. En fråga, som i detta sammanhang något bör behandlas, gäller inlärandet av tekniken för de vanliga räkneoperationernas utförande. Bör detta inlärande i all huvudsak bestå i ett mekaniskt innötande av ett visst förfaringssätt, eller bör man sträva att lära barnen begripa tekniken? Vi anse, att det senare är det riktiga. Visserligen är mekanisk säkerhet i denna teknik nödvändig, men denna mekanisering kan och bör — åtminstone i väsentlig mån — komma som ett resultat av en ofta företagen upprepning av den tankegång, som ligger bakom tekniken. Alltså först begripande, sedan mekanisk färdighet så småningom. Tänkbart vore att försvara ett mera mekaniskt inlärande av tekniken med argumenten, att det i många fall är omöjligt att lära barnen begripa den, och att i alla händelser »tragglet» med begripandet tar oproportionerligt mycket tid i anspråk, som bättre kunde användas till grundlig inövning av tekniken och till problemlösning. Häremot måste invändas, att erfarenheten visar, att det är möjligt på rimlig tid lära normalt begåvade barn begripa de tankegångar, det här är fråga om. Visserligen är det ju sant, att arbetet med att lära barnen begripa tekniken *kan* taga oproportionerligt mycket tid i anspråk, och att en lärares nit i detta hänseende kan leda till dödande tråkigt traggel, men detta ödslande med tiden ligger säkerligen ej i sakens natur utan har sin grund i felgrepp från lärarens sida, vilka han alltså bör söka rätta. Man bör komma ihåg, att *sedan* barnen mekaniskt inlärt ett tillvägagångssätt äro de i allmänhet föga intresserade av att få det förklarat, och att lärarens arbete därutinnan lätt blir ofruktbart. Men om barnen i stället inlära tekniken genom att använda sin tanke, blir arbetet med begripandet lika intressant som det i förra fallet var tråkigt.

En stor vinning, som arbetet att förstå sättet för räkneoperationernas utförande för med sig, är att innebörden i dessa operationer därigenom belyses och blir förstådd av barnen, medan det blott mekaniska utförandet ur denna synpunkt är värdelöst, ja, skadligt, då tanklösheten lätt kan bli så stor, att såväl elever som lärare i det myckna sifferräknandet glömma att tänka efter, om själva *innebörden i de räkneoperationer*, som mekaniskt utföras, är begripen. Hur många barn kunna ej svara att $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ är lika med $\frac{6}{20}$ eller att $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ är lika med $\frac{12}{10}$, utan att de hava reda på, vad som menas med att $\frac{2}{5}$ skall multipliceras med $\frac{3}{\text{[illegible]}}$ eller med att $\frac{4}{\text{[illegible]}}$ skall divideras med $\frac{2}{\text{[illegible]}}$. Med ett sådant undervisningssätt börjar man betänkligt närma sig den gräns, där räkningen från att vara ett betydelsefullt arbete övergår till att bliva en meningslös lek med siffror.

Naturligtvis *behöver* ej ett mekaniskt inlärande av sättet för räkneoperationernas utförande leda till en så absurd konsekvens, ty det måste erkännas, att en person kan hava en klar uppfattning av innebörden i en räkneoperation och förstå, vad resultatet av dess utförande betyder, fast han ej förstår *hur* resultatet uppnåtts. Så t. ex. kan en person mycket väl begripa vad som menas med att $\sqrt{1369}$ är 37 utan att begripa tillvägagångssättet vid rotutdragning. Och på samma sätt vid t. ex. den vanliga multiplikations- och divisionstekniken i hela tal. Men detta ändrar dock ingenting i det förut sagda om önskvärdheten av att barnen lära sig begripa tekniken.

Ett annat område, där man måste vara på sin vakt mot mekaniseringen, är problemlösningen. Om även denna mekaniseras, blir det inte mycket utrymme för den tankeövning, som borde vara en huvuduppgift. Att använda formler och schemata för lösning av vanliga enkla uppgifter är således olämpligt. De böra lösas ej genom användning av en inlärd formel utan genom att en tankegång inövas. Ur rent praktisk synpunkt är det senare också mycket att föredraga. En mer eller mindre väl förstådd formel glömmes lätt, men en tankegång, som träget inövats, är i allmänhet lätt att tänka ånyo även efter lång tid. Vi återkomma till den frågan längre fram.

§ 3. Skola barnen kunna begripa kursen, kräves, att *lärogången* är sådan, att varje efterföljande moment enkelt och naturligt framgår ur det föregående. En sådan lärogång kallas genetisk. Läraren måste följa en bestämd plan och ha en klar överblick av hela lärogången och varje timme hava klart för sig, vad han önskar lära barnen. Läraren skall dock ej på förhand bestämma, hur långt han skall hinna på timmen och så sträva att hinna med det, utan hans förberedelser böra gälla ett kursmoment, som han behandlar under så många timmar, som behövas. Att på förhand exakt ange dessas antal är icke möjligt.

Men lärogången skall vara genetisk ej blott ur lärarens synpunkt utan ock ur barnens, vilket betyder, att *varje föregående moment måste vara inlärt, innan ett nytt genomgås.* Det är därför av vikt, att undervisningen skrider långsamt fram, att tillräckligt antal uppgifter givas för varje moment, och *att läraren* genom prövningar *ordentligt tar reda* på, om barnen behärska momentet i fråga. Undervisningsplanen säger härom: »innan man lämnar ett behandlat område, bör noga undersökas, huruvida samtliga barn med tillräcklig säkerhet behärska detsamma, för vilket ändamål de lämpligen kunna var för sig erhålla särskilda uppgifter att lösa».

Många lärare sätta en ära i att hinna med så stora kurser som möjligt. Häri ligger intet förtjänstfullt. Felet med mångens undervisning är just, att han hunnit med för mycket. Sällan felar någon genom att hinna med för litet. — Att matematiken bereder så stora svårigheter, och att så många anses »ha svårt» för detta ämne, beror säkerligen i många fall på att vissa kursmoment, som äro nödvändiga för en rätt uppfattning av de följande, ej blivit tillräckligt behandlade. Även elever med i det hela god studiebegåvning kunna därför ibland råka ut för missödet att »få svårt» för matematiken, varigenom den oriktiga åsikten kunnat uppkomma, att framgången av matematikstudierna i skolan ej i första hand beror av elevens allmänna studiebegåvning utan av en specialbegåvning för ämnet.

En viss självständighet gentemot läroboken kräves av läraren, om han skall kunna tillfredsställande fylla sin uppgift. Han får ej lov att följa metoden »därifrån och dit» i läroboken. Denna skall vara hans tjänare, ej herre. En lärobok kan aldrig hava precis så många exempel på varje avdelning, som klassen behöver. Barnen kunna behöva räkna ett större antal exempel från en avdelning och kunna kanske reda sig med ett mindre antal från en annan avdelning. Även av åtskilliga andra skäl kräves av läraren ett självständigt initiativ, varom mera i det följande.

§ 4. För att barnen skola kunna förstå och tillgodogöra sig kursen, *måste undervisningen vara åskådlig.* Barnens förmåga att begripa abstrakta utredningar är ringa, och många pedagoger ha på grund därav förklarat, att det myckna arbetet med begripande är utsiktslöst. Häri ligger ett felslut. Riktigt är blott, att barn i än högre grad än vuxna äro i sitt matematiska tänkande beroende av åskådningen. Men åskåda betyder ej blott se, utan klart, konkret uppfatta, och den allra bästa åskådliga uppfattningen få barnen, när *de själva få vara verksamma,* när de själva få utföra de handlingar, som skola åskådliggöra räkneoperationerna, i stället för att bara sitta och se på, när läraren utför dem.

Den yttre åskådningen är emellertid ett medel att komma fram till den inre, till en åskådning i fantasien, till det åskådliga tänkandet. Och kravet på åskådlighet kan leda till överdrift i att visa barnen allt möjligt, som de redan ha en klar uppfattning av i sin fantasi, medan man försummar att uppöva deras förmåga av åskådligt tänkande. — Ej blott i fråga om den yttre åskådningen utan ock beträffande tänkandet bör man sträva efter självverksamhet från barnens sida. Skillnaden mellan ett mera aktivt och mera passivt tänkande är lika markerad som mellan bara se på och själv göra. Båda formerna äro värdefulla, men i skolarbetet får ofta det aktiva tänkandet för litet utrymme. Matematikstudierna borde härvidlag i viss mån bilda en motvikt, då läraren lätt nog kan lägga undervisningen så, att det passiva mottagandet ej blir huvudsaken. Vid inlärandet av ett nytt moment i kursen kan läraren låta barnen med så liten ledning som möjligt själva upptäcka det, som skall inläras (heuristiska metoden), och vid tillämpningsuppgifter och inövningsarbete böra barnen arbeta så självständigt som möjligt och få vänja sig att genom användning av lämpliga kontrollprov lita på sig själva.

§ 5. Den metod, som tar barnens aktivitet mest i anspråk, blir ock den intressantaste, en sak av allra största betydelse. Den undervisning, som ej lyckas fånga barnens intresse, måste anses vara i väsentlig mån misslyckad. Visserligen kunna barnen fås att arbeta, att följa med och spänna sin uppmärksamhet genom flera åtgärder, (genom appellerande till deras pliktkänsla och till deras ärelystnad i dess olika former, genom straff och genom belöningar) och dessa metoder äro både nödvändiga och till en del ytterst värdefulla, men den kanske betydelsefullaste kraftkällan till arbete går man miste om, när man ej lyckas anknyta till och vidare utveckla *barnens naturliga intresse för ämnet*. Man bör komma ihåg, att barn såväl som vuxna lättare begripa det, som de ha intresse för, lära det snabbare, komma bättre ihåg det och ha lättare för att använda det. — Att giva regler för hur läraren skall gå tillväga för att fånga barnens intresse är ej möjligt. Det blir lärarbegåvningens sak att finna utvägar. Mycket beror på den form, under vilken uppgiften lägges fram för barnen, och det sätt, varpå det sker. — Tänk efter, vad barnen gärna skulle vilja göra eller gärna veta! — Kom ihåg, att förklaringar i efterhand äro tråkiga! Sedan barnen tro sig kunna en sak, vilja de ej ha den förklarad. Förklaringen skall komma som lösning av ett problem, som barnen känna som problem. Ingen är intresserad av förklaringar över en sak, som han ej känner något behov att få förklarad. Att — som förut framhållits — få långrandiga förklaringar av en teknik, som de redan kunna, intresserar ej barnen, men att använda sin tanke för att lära sig denna teknik är intressant. — Barn älska omväxling. Läraren måste sträva efter variation, ej binda sig vid en viss lektionsform, över huvud akta sig för stereotypi.

§ 6. Några synpunkter på räkneuppgifternas beskaffenhet.

Räkneuppgifterna kunna hänföra sig antingen till rena tal eller till konkreta storheter, vilka två slag av uppgifter ofta kallas sifferexempel och sakexempel eller med en något oegentlig terminologi obenämnda och benämnda tal. I vissa räkneuppgifter (s. k. övningsexempel) gäller det att endast utföra bestämt angivna räkneoperationer, medan det i andra uppgifter (tillämpningsexempel eller egentliga problem) gäller att analysera uppgiften för att komma underfund med, vilka räkneoperationer som skola utföras.

Vid valet av uppgifter har man naturligtvis att tänka på matematikundervisningens mål. Vore detta endast att sätta barnen i stånd att lösa sådana enkla räkneuppgifter, som kunna möta dem i det praktiska livet, skulle man ju ej behöva giva någon annan sorts uppgifter — frånsett sådana, som kunde vara speciellt lämpade att bibringa barnen förståelse av räkneoperationerna och färdighet att utföra dem. — Men målet är ju ej blott att bibringa denna praktiska kunskap utan ock att giva åtskilliga andra värdefulla kunskaper och att i god riktning påverka barnens tanke- och viljeliv. Och om undervisningen skall på bästa sätt fylla denna sin allmänbildande uppgift, räcker det ej att endast giva i inskränktaste mening »praktiska» problem. Man måste också sträva att giva intressanta och tankeövande problem och sådana, som giva barnen kunskaper från olika områden av livet, och som kunna i god riktning påverka deras personlighet. Naturligtvis är det utmärkt, om i ett och samma problem flera av dessa synpunkter, eller alla, kunna tillgodoses, men man måste vara rimligt fordringsfull och säga, att en uppgift kan försvara sin plats vid undervisningen, om den blott ur någon nu antydd synpunkt håller måttet, alltså om uppgiften innehåller en sådan beräkning, som sannolikt kommer att möta i det verkliga livet, om den belyser en räkneoperations innebörd, om den är behövlig för uppövande av den mekaniska räknefärdigheten, om den ger värdefull realkunskap, om den intresserar barnen, och om den på ett gott sätt påverkar barnens tanke- eller viljeliv. Naturligtvis gäller det att hålla en sund proportion mellan de olika slagen av uppgifter. Man kan gå till överdrift i olika riktningar. Man kan tänka för mycket på att uppgifterna skola vara »praktiska», man kan för mycket sträva efter »tankeövning» och också för mycket tänka på att »intressera» barnen. Dock hålla vi för troligt, att skulle en enda ledprincip för problemurvalet väljas, så vore barnens intresse en bättre ledstjärna än vare sig nyttan eller tankeövningen.

Vi skola nu endast säga några ord om de praktiska problemen och om tankeövningsuppgifterna. I övrigt hänvisas till den följande framställningen.

Att barnen skola lära sig räkna uppgifter av en art, som sedan troligen kommer att möta dem i livet, är ju en allmänt erkänd fordran på räkneundervisningen. Och våra läroböcker innehålla alltid en mångfald hithörande exempel. Läroboken kan dock aldrig giva tillräckligt av vad som här behöves, utan det kräves ett ständigt ingripande från lärarens sida. Det är nämligen så, att i det praktiska livet komma barnen att möta många uppgifter av en annan typ än lärobokens praktiska problem. De komma nämligen att ställas inför räkneuppgifter, *i vilka ingen talar om, vad de behöva ha reda på för att kunna lösa problemet*, problem alltså, i vilka det gäller att fundera ut, vilka uppgifter som erfordras för lösningen, och att taga reda på dessa uppgifter, innan räknearbetet kan börja. I lärobokens problem bruka däremot alla dessa för lösningen behövliga uppgifter finnas angivna. Ett enkelt exempel. I läroboken står: »En person vill ha målat ett plank, som är 10 m. långt och $1^1/_2$ m. högt. Hur stor blir kostnaden efter ett pris av 1,50 kr. pr kvm.?» Men i verkligheten ställes personen inför problemet i följande form: »Hur mycket kan målningen av det här planket månne kosta?» Och vill han så själv räkna ut det, får han tänka efter, vilka uppgifter som erfordras för uträkningen (alltså priset pr kvm. och plankets dimensioner) och så taga reda på dem. Och på samma sätt i en mängd fall. Det är klart, att problemen i denna form äro betydligt svårare än i läroboksformen, ty genom att få detaljerade upplysningar om alla de uppgifter, som erfordras för lösningen, har man i själva verket fått god vägledning i fråga om denna. Att själv tänka ut, vilka dessa uppgifter äro, är alltså också ur tankeövningssynpunkt mycket värdefullt. När så detta arbete åtföljes av arbetet med införskaffandet av erforderliga fakta och därefter av uträkningen, ha barnen uppenbart övats på ett sätt, som bör i hög grad vara ägnat att befordra deras praktiska duglighet. Införskaffandet av uppgifter kan ske på många sätt. Barnen kunna i vissa fall direkt uppgiva eller genom egna iakttagelser finna dem, uppgifterna kunna kanske hämtas ur läroboken eller någon annan bok, där barnen få taga reda på dem. Vid detta arbete kunna de alltså få någon övning i att använda uppslagsböcker. Barnen kunna få i uppdrag att införskaffa uppgifter genom att fråga personer, som kunna an-tagas ha reda på dem. Slutligen kan naturligtvis läraren understundom också hjälpa till och lämna upplysningar om efterfrågade fakta. I många fall kan det vara omöjligt eller olämpligt att sätta hela klassen i arbete med införskaffandet av upplysningarna; det blir i stället endast någon eller några av barnen, som få det anförtrott åt sig. Vi se, hur genom detta beaktande av det verkliga livets krav en givande källa öppnas till intressant, tankeövande arbete med påtagligt värde för barnets utveckling till en vaken, intelligent och praktiskt duglig person. Det är klart, att man vid problem av detta slag har att i stort sett hålla sig till erfarenhetsområden, som ligga barnen nära. Annars är det orimligt begära, att de skola kunna angiva, vilka uppgifter som erfordras för problemets lösning. Räkneuppgifter av sådan art, att i allmänhet endast yrkesmän kunna angiva, vilka sakuppgifter som erfordras för lösningen, böra naturligtvis ej tagas upp till behandling. Sådana uppgifter höra hemma vid räkneundervisningen i en yrkesskola, ej i en skola för allmänt medborgerlig bildning. Men man behöver dock ej vid uppgifter av hithörande slag *helt* begränsa sig till det erfarenhetsområde, barnen äga. Meningen är ju, att detta skall vidgas och i riktning mot sådant, som envar kan anses böra äga kännedom om. Till denna utvidgning av barnens erfarenhet bör och kan även räkningen bidraga, i det läraren ibland vid ett problems behandling får anledning att tala med barnen om saker, som de ej förut hade reda på. Även vid ett sådant problems lösning kunna barnen mycket väl aktivt medverka, om problemet endast i det hela rör sig på ett område, som barnen äro förtrogna med. Antag t. ex., att det gäller beräkning av kostnaden för en resa, som en person tänkes skola företaga. Vid en sådan uppgift kunna ju barnen utmärkt medverka, och ändå får läraren säkerligen vid samtalet om denna resa och de utgifter, som kunna vara förbundna med den, tillfälle att lära barnen åtskilligt för dem nytt, som kan vara av värde för envar att känna till.

Läraren kan gärna ibland låta barnen hjälpa till, även när det gäller att hitta på problem. Intresset blir alltid större för en uträkning, som de själva föreslagit. De vilja kanske syssla med beräkningar, som erfordras i och för juluppköpen eller firandet av mors dag eller tillställandet av en barnbjudning eller byggandet av en lekstuga etc., allt förträffliga uppgifter av nu antytt slag.

Så skulle vi också säga några ord om tankeövningsproblemen. Det är icke bara under sysslandet med praktiska problem, som tanken skall övas, utan det kan gott anses berättigat att konstruera problem blott och bart för tankeövningens skull. En del nyttig tankegymnastik går man annars lätt förlustig, och man må betänka, att tankeövningen är en huvudpunkt i räkneundervisningens mål. En lämplig svårighetsgrad i fråga om problemen är av synnerlig vikt. För lätta problem ge ej tillräcklig tankeövning och bli ointressanta, för svåra verka deprimerande och taga också bort lusten för räkningen. När man ej behöver tänka på att problemet skall vara praktiskt, har man lättare att konstruera ett ur tankeövningssynpunkt lämpligt problem. Men en sak angående dessa problem bör framhållas: man bör ej söka giva dem *sken av att vara praktiska* genom en strävan att hänföra dem till i praktiska livet förekommande ting. Detta leder ofta till dessa orimliga eller löjliga uppgifter, som bringa vanrykte över räkneundervisningen, t. ex.: »Om 12 man fullborda ett arbete på $4^{1}/_{3}$ dagar, huru många man behövas då för att fullborda det på $2^{3}/_{5}$ dagar?», och vilka av en författare parodieras i problemet: »Om $1^{1}/_{2}$ höna på $1^{1}/_{3}$ dag lägger $1^{1}/_{4}$ ägg, huru många ägg lägger då $^{3}/_{4}$ höna på 13 timmar?»

Nu anse vi det visserligen inte vara så stor olycka skedd, om i en lärobok eller vid undervisningen råkar komma in enstaka problem, sådana som det om de 12 männen och dagarna, men förekomma de ganska ofta, kunna de vara farliga nog genom att de alstra slöhet hos barnen i deras aktgivande på verkligheten, en slöhet, som barnen lätt hemfalla åt, och som av en författare parodieras så, att barnen »acceptera utan tvekan, att en spårvagn går 20 km. i minuten, eller att ett dussin apelsiner är billigare än ett enda exemplar av samma frukt. De baxna icke ens över att en halv karl behöver 47,856 timmar för att bygga en mur, som är 10 meter hög och 2 cm. lång». Till denna okritiskhet hos barnen är dock skulden säkerligen framför allt den, att de i matematikundervisningen få inlära mycket utan att därtill använda sitt förstånd. Kanske ha de rent av kommit till det resultatet, att det ej lönar sig försöka begripa, utan att det endast gäller mekaniskt lära och utföra räkningarna.

Men undviker man blott det nu påtalade felgreppet, kan sysslandet med tankeövningsproblem vara utmärkt trevligt och nyttigt. Barn ha starkt intresse för räknegåtor och sådant. Rena talproblem anse vi höra till de ej minst värdefulla problemslagen. Vi få tillfälle att senare giva en del exempel på sådana problem.

§ 7. Om sakinnehållet i räkneuppgifterna.

Med hänsyn till områden, från vilka sakinnehållet i räkneuppgifterna hämtas, kunna särskiljas följande trenne. Först ha vi barnets omedelbara erfarenhetsområde, från vilket naturligtvis alltid hämtas mycket stoff till uppgifterna, mest vid den första undervisningen, något mindre senare. Så ha vi ett kunskapsområde, som alldeles särskilt kan anses höra samman med räkneundervisningen, nämligen det, som omfattar de vanliga måtten och mätningarna. Det har alltid ansetts som en viktig uppgift för räkneundervisningen att meddela barnen kunskaper från detta område; alltså kunskap om längd-, yt-, rymd- och viktsmått, om vanliga sorter, om mynten (svenska och utländska), om tidsmåtten samt om de vanligaste mätningsinstrumenten. Det tredje området skulle kunna sägas vara hela naturens och kulturens värld, ty från alla möjliga områden kunna räkneexempel väljas. Här är det vid räkneundervisningen i allmänhet ej fråga om att bestämda fakta skola inpluggas, men kunskapssynpunkten bör dock vid sysslandet med räkneuppgifter från olika områden ej lämnas ur sikte. Genom räkneuppgifterna kan åtskilligt, som inlärts i andra ämnen, repeteras och bättre klargöras. Nära nog alla ämnen kunna så få gagn av räkningen, men särskilt de naturvetenskapliga: fysiken, kemien, astronomien, biologien och geografien. Vi behöva bara nämna sådant som specifik vikt, lufttryck, värmegrader, ämnens kemiska sammansättning, planetsystemets dimensioner, födoämnenas näringsvärde, de olika ländernas ekonomiska förhållanden, för att man genast skall se, vilken oerhört stor mängd i undervisningen i dessa ämnen förekommande ting, som utmärkt kunna belysas i form av räkneuppgifter. Det är skäl, att läraren ägnar denna sak uppmärksamhet och planlägger undervisningen rationellt. De stora fördelarna av att samma lärare undervisar i många ämnen i en klass, som förhållandet är i folkskolan, kunna här utnyttjas, i det läraren under matematiktimmen tar upp till behandling de partier, som han finner behöva repeteras eller belysas. För övrigt bör han ej heller försumma att allt emellanåt också direkt vid undervisningen i annat ämne förelägga barnen ett litet räkneexempel, vilket är bra även ur den synpunkten, att barnen få klart för sig, att räkning ej bara är något, som man sysslar med under räknetimmarna. Deras handfallenhet, när de någon sällsynt gång utanför räknetimmen få sig förelagd en räkneuppgift, har ju mycket ofta påtalats och riktats som en anmärkning mot räkneundervisningen, medan den kanske ibland med mera rätt kunde riktas som en anmärkning mot undervisningen i de andra ämnena, i vilka man försummar att använda matematiken.

Genom problemens innehåll kan emellertid förmedlas värdefull kunskap från många andra områden än dem, som direkt behandlas i skolans »ämnen». Särskilt med affärslivets förhållanden bruka ju barnen mycket få syssla under räknetimmarna, och inlärandet av vissa begrepp betraktas som obligatoriskt, såsom kapital, ränta, rabatt. Under räknande av handelsproblem kunna barnen — fast det naturligtvis ej är fråga om någon inpluggning — onekligen få en ej obetydlig kunskap om varorna och deras priser, det senare av värde, trots prisernas växlingar, vilken företeelse för övrigt också kan bli föremål för behandling, så att begreppen allmän prisnivå och prisindex klargöras för barnen. Den kunskap om olika slag av bankaffärer, inlånings- och utlåningsrörelsens olika arter, som räkneuppgifterna förmedla till barnen, är naturligtvis ock av stort värde. Men man skulle möjligen kunna anmärka, att tillämpningsexemplen ofta i väl stor utsträckning bestå av affärsproblem, och att det finns andra förhållanden, som borde mera komma till behandling, än i allmänhet sker. Vi kunna nämna frågor, som stå i samband med *hemmets ekonomi*. Här är mycket, som man kan syssla med redan på det åldersstadium, i vilket barnen befinna sig i folkskolans högsta klass. Sparsamhetens betydelse för individen och samhället bör belysas genom många exempel, och i samband därmed uppmärksamhet ägnas åt kaffe-, tobaks- och rusdrycksmissbruket. Vid den undervisning om rusdryckerna, som i folkskolan bör givas, har också räkneundervisningen en ej oviktig uppgift att fylla. Möjligheten av kapitalbildning genom sparsamhet bör uppmärksammas, varvid det är av värde, att barnen göras förtrogna med begreppet ränta på ränta och få lära sig att använda en räntetabell. — En viktig grupp av problem utgöra de, som beröra sociala och nationalekonomiska förhållanden. I folkskolans högsta klass, och än mer i fortsättningsskolan, torde räkneuppgifter av detta slag i stor utsträckning böra givas. — Och så en viktig sak: läraren bör ej känna sig förpliktigad att låta barnen räkna igenom alla problemen i läroboken. Härom säger undervisningsplanen: »Den antagna räkneboken bör icke få bliva helt bestämmande i fråga om valet av räkneuppgifter. Förekomma i densamma räkneexempel, som sakna intresse och praktisk betydelse för lärjungarna, böra de undvikas. Å andra sidan kan räknebokens exempel flitigt utfyllas med uppgifter, som hämtas omedelbart från förhållandena i omgivningen».

§ 8. **Huvudräkning och skriftlig räkning.**

Barnen skola övas i såväl huvudräkning som skriftlig räkning. Skillnaden mellan dessa räkneformer består dels däri, att vid huvudräkningen ingen taluppskrivning förekommer, och dels i att uträkningen ofta verkställes på något olika sätt.[1]) Att uträkningen gestaltar sig olika, beror på att man vid huvudräkningen strävar att använda metoder, som ej ställa för stora krav på minnesförmågan, medan man vid den skriftliga räkningen ej behöver taga sådana hänsyn. Olikheten går gärna i den riktningen, att man vid den skriftliga uträkningen delar upp talen mera, än som brukar ske vid huvudräkningen, t. ex. $865 + 734$ uppdelas vid huvudräkning gärna i följande delar: $865 + 700 + 30 + 4$, medan uppdelningen vid den skriftliga räkningen är $4 + 5$, $60 + 30$, $800 + 700$.

Man bör se till, att barnen ej få den uppfattningen, att det är fråga om två alldeles olika slags räkning. Benämningarna huvudräkning och skriftlig räkning kunna lätt ingiva dem tanken, att skriftlig räkning ej är huvudräkning utan något slags mekanisk sysselsättning. Bättre vore benämningarna *räkning utan och med taluppskrivning*, som direkt peka på den omedelbara och viktigaste olikheten. Vid den första räkneundervisningen bör ej heller finnas någon annan olikhet än denna mellan huvudräkning och den skriftliga räkningen. Vare sig talen skrivas upp eller ej, uträknas de på samma sätt. Uppskrivningen — »räkning på raden» — framstår så för barnen endast som ett medel att komma ihåg de givna talen eller vissa uträkningsresultat. Först vid ett något senare stadium — tidigast under senare delen av andra skolåret — göras barnen uppmärksamma på att man, när man skriver upp talen, ofta med fördel kan använda en uträkningsmetod, som ej skulle vara praktisk att använda vid huvudräkning. Men denna förändring beträffande uträkningen behöver ju ej för barnen te sig som en övergång från den förut övade räkningen till något helt nytt.

Under de första två skolåren är räkningen sålunda — med hänsyn till sättet för utförandet — nästan uteslutande huvudräkning, och först därefter tages arbetet med den skriftliga

---

[1]) En annan olikhet är, att den skriftliga räkningen med tiden ofta blir mekaniserad, medan huvudräkningen alltid bibehåller sin karaktär av »tankeräkning».

räkningen upp riktigt på allvar. Det gäller emellertid att ej heller under den senare skoltiden försumma huvudräkningen, och undervisningsplanen föreskriver direkt, att *särskilda huvudräkningsövningar* skola förekomma i alla klasser på folkskolestadiet — tydligen för att markera, att den skriftliga räkningen ej får taga överhand på detta stadium.

Vid huvudräkningen bör ett visst bestämt förfaringssätt inläras — en *normalmetod*. Sedan barnen väl behärska den, kunna de få hitta på *genvägar*, och läraren kan göra en del påpekanden angående vissa praktiska sådana, och någon gång kan han som ett talproblem giva barnen i uppgift att söka hitta på olika sätt att lösa en huvudräkningsuppgift; men någon mera systematisk undervisning om eller inövning av genvägar bör ej förekomma. Särskilt måste *varnas mot* att taga upp tiden med inlärande av svårförståeliga och i det hela föga betydelsefulla räknegenvägar, t. ex. att 23 × 28 kan uträknas som 20 × (28 + 3) + 3 × 8 eller att 23 × 27 = 25 × 25 — 2 × 2.

En användbar *normalmetod* för de olika räknesätten framgår av följande exempel.

1) 743 + 692 = 743 + 600 + 90 + 2,
2) 852 — 567 = 852 — 500 — 60 — 7,
3) 7 × 68 = 7 × 60 + 7 × 8,
4) 816 : 12 = 720 : 12 + 96 : 12.

Som *exempel på genvägar* meddelas följande lösningar av ovanstående uppgifter.

1) 743 + 692 = 743 + 700 — 8,
2) 852 — 567 = 867 — 567 — 15,
3) 7 × 68 = 7 × 70 — 7 × 2,
4) 816 : 12 = 840 : 12 — 24 : 12.

Vid huvudräkning gäller det ju att hålla alla förekommande tal i minnet, men detta hindrar ej, att även vid övning, som avser utvecklandet av barnens färdighet i huvudräkning, taluppskrivning dock kan vara till nytta. Vid huvudräkning gäller ju ock att inlära ett visst sätt för räkningens utförande, och övning härav kan mycket väl ske i samband med skriftlig räkning. I allmänhet uppskrivas endast de givna talen, varefter barnen få göra uträkningarna utan vidare taluppskrivning, men någon gång kan det vara bra att markera hela tankegången genom uppskrivning av de olika uträkningarna.

T. ex. 743 + 692 = 743 + 600 + 90 + 2,
743 + 600 = 1343,
1343 + 90 = 1343 + 57 + 33 = 1433,
1433 + 2 = 1435.

Uppskrivandet av de givna talen kan som sagt vara berättigat såsom ett led i övandet av huvudräkning, alldenstund barnen kunna behöva vinna övning i sättet för uträkningens utförande, innan de orka med att lösa uppgiften med huvudräkning i egentlig mening. Så torde addition av tresiffriga tal vara så pass besvärligt, att barnen väl behöva den förberedande hjälp, som talens uppskrivning innebär. *Men sådan hjälpövning får naturligtvis ej bli självändamål* och taga oproportionerligt mycket av den åt huvudräkning ägnade tiden i anspråk. Så särdeles mycken nytta av att med huvudräkningsmetod kunna utföra räkningarna, sedan man förut uppskrivit de givna talen, har man ju ej. Särskilt om barnen få skaffa sig övnings-(läro)böcker i huvudräkning, är risken stor, att de för mycket komma att sysselsättas med sådan förberedelse och för litet med den egentliga huvudräkningen.

För befordrandet av snabbhet vid huvudräkningens utförande är det lämpligt att införa tävlingsmomentet. Någon gång kan man driva tävlan så, att den först färdige genast säger lösningen. Ett annat trevligt sätt är att låta barnen utföra en serie huvudräkningar med angivande endast av slutresultatet. Övningen kan drivas antingen så, att läraren väntar att giva en följande uppgift, tills han av barnens pekningar ser, att alla eller nästan alla äro med, eller ock så, att läraren i någon viss lämplig takt (takträkning) ger uppgifterna. Det gäller då för barnen att hinna med, och övningen kan bli mycket effektiv för vinnande av färdighet i snabbräkning.

De särskilda huvudräkningsövningar, undervisningsplanen föreskriver, böra endast fortgå helt kort stund, högst 10 à 15 minuter, men i allmänhet betydligt kortare. Lämpligt är ofta att börja lektionen med några minuters sådan övning, vilket verkar uppryckande på barnen och av dem omfattas med intresse. Men övandet av huvudräkning skall naturligtvis ej vara begränsat till dessa minuter. Överhuvud gäller, att varje tilllämpningsexempel, som barnen syssla med, och som lämpar sig för uträkning, medelst huvudräkning, bör så uträknas. Och även vid exempel, som behandlas medelst skriftlig räkning, bör huvudräkning användas vid detaljräkningar, där så lämpar sig, vilket det mycket ofta gör. Beaktas dessa möjligheter till huvudräkning, torde denna ej riskera att bli tillbakasatt, även om de särskilda huvudräkningsövningarna ej skulle upptaga så stor del av hela räknetimmen. Och på grund av huvudräkningens stora praktiska betydelse måste man se till, att barnen få tillräcklig övning däri; vilket av undervisningsplanen betecknas som ett »huvudsyfte för räkneundervisningen».

ANDRA AVDELNINGEN.

Inlärandet av talen (hela tal och bråk) och taloperationerna (de s. k. fyra räknesätten).

§ 9. Lärostoffet och dess fördelning på årskurser.

Vi meddela här undervisningsplanens till huvudsaklig ledning givna bestämmelser för kursfördelningen i sjuklassig folkskola av A-formen, varvid vi till de olika klassernas kurser foga några randanmärkningar.

Första klassen. »Behandling av talområdet 1—20 eller, där så finnes lämpligt, 1—30, därvid övningar för vinnande av färdighet särskilt böra avse tilläggning och fråndragning.

Övningar i användning av mått: centimeter och deciliter; vikter: hektogram; mynt: ören. Några vanliga stycketalssorter och tidsmått.»

Andra klassen. »Behandling av talområdet 1—100, därvid övningar för vinnande av färdighet särskilt böra avse tilläggning och fråndragning.

Övningar i användning av mått: centimeter, decimeter och meter — i samband därmed någon användning av större tal än 100 —; deciliter och liter; vikter: hektogram och kilogram; mynt: ören och kronor. Vanligare stycketalssorter och tidsmått.»

Talbehandlingen uppdelas lämpligen — synes det oss — i en successiv behandling av talområdena 1—10, 1—20 och 1—100. Vid behandling av talområdet 1—10 böra barnen endast stifta bekantskap med räknesätten addition och subtraktion, medan multiplikationen och divisionen uppträda först vid behandlingen av talområdet 1—20 eller 1—100.

Härmed avvisas sålunda den monografiska talbehandling, som föreslogs av den tyske metodikern Grube i mitten av 1800-talet, och som sedan livligt diskuterats. Undervisningen skulle fortskrida från tal till tal — ej från räkneoperation till räkneoperation, som förr varit vanligt —, och varje enskilt tal skulle underkastas en allsidig behandling, under vilken alla räknesätten skulle komma till användning. Talet 4 belyses någorlunda allsidigt genom följande räkneoperationer, vilka naturligtvis först böra förekomma i form av konkreta storheter:

$3+1=?$, $2+2=?$, $4=3+?$, $4=1+?$, $4=2+?$,
$4-1=?$, $4-2=?$, $4-?=3$, $?-1=3$, $4-?=2$, $?-2=2$,
$1\times4=?$, $4\times1=?$, $2\times2=?$, $?\times2=4$, $2\times?=4$,

4 : 2—?, ? : 2=2, 4 : ?=2,
$\frac{1}{2}$ av 4=?, ? av 4=2, $\frac{1}{2}$ av ?=2.

(För närmare upplysning om hur en allsidig behandling av talet 4 kan gestalta sig hänvisas till *Bucht och Svensk*, Anteckningar i räknemetodik.) Efter talet 4 underkastas så talet 5 samma allsidiga behandling, därpå 6 etc.

Visserligen böra ju barnen nå fram till en grundlig kännedom om talen 1—10, men att genast från början söka lära barnen uppfatta alla räkneoperationerna är olämpligt. Barnen ha vid arbetet inom talområdet 1—10 alldeles nog med att lära sig behärska addition och subtraktion och i samband därmed lära sig, i vilka delar talen kunna uppdelas. Multiplikation och division böra alltså uteslutas vid behandlingen av talområdet 1—10; men i övrigt torde det vara ganska lämpligt att låta undervisningen fortskrida från tal till tal och i fråga om varje tal öva tilläggning, uppdelning (t. ex. 4=3+?) och frårdragning.

En viktig uppgift för arbetet under andra skolåret blir att bibringa barnen förståelse av multiplikationen och de båda divisionsräknesätten och öva dessa räknesätt inom multiplikationstabellens område. Det bör dock — enligt undervisningsplanen — »icke fordras, att lärjungarna under de två första skolåren skola uppnå färdighet inom multiplikationstabellen». Undervisningsplanen inskärper vikten av att man i räkningen går *långsamt framåt* och ej inför nya moment, förrän de föregående äro tillräckligt behandlade.

Säkerligen finnas många lärare å småskolestadiet, som sträva att hinna med så stora kurser som möjligt (kanske både multiplikation och division långt utanför multiplikationstabellens område), men det bör starkt framhållas, att en sådan forcering i småskolan kan vara till ohjälplig skada för många barn, och att den står i bestämd strid mot undervisningsplanens hela anda.

Tredje klassen. »De fyra räknesätten med hela tal jämte tillämpningar, dock med den begränsningen, att multiplikator och divisor i regel hämtas från talområdet 1—10, samt att i allmänhet endast ett räknesätt förekommer i varje uppgift. Särskilda huvudräkningsövningar. Övningar i användning av även andra allmänt brukliga mått och vikter än de förut upptagna. Särskilda övningar i sortförvandling, även omfattande stycketalssorter och tidsmått.»

Fjärde klassen. »De fyra räknesätten med hela tal jämte tillämpningar, även omfattande enkla uppgifter med mera än ett räknesätt. — Särskilda huvudräkningsövningar. — I samband med uppfattning och användning av yt- och rymdmåtten mätning och beräkning av kvadraters och andra rektanglars ytor samt av kubens och andra rätvinkliga kroppars rymder. — Översikt av mått och vikter ävensom av andra förut genomgångna sorter. Särskilda övningar i sortförvandling.»

Beträffande talområdet gives i undervisningsplanen ingen anvisning. Det torde vara lämpligt att i tredje klassen i allmänhet hålla sig till området 1—10 000. I fråga om divisionen i klass 3 bör märkas, att en mera fullständig behandling av innehållsdivision med ensiffrig divisor logiskt förutsätter multiplikation med mer än ensiffrig multiplikator. Man bör alltså ej föra innehållsdivisionen längre, än som svarar mot det i multiplikationen behandlade. Det synes oss emellertid lämpligt, att redan i klass 3 utvidga multiplikationen till tal, i vilka multiplikatorn innehåller mer än en siffra.

Femte klassen. »Fortsatt övning i de fyra räknesätten med hela tal jämte tillämpningar. Allmänna bråk: bråks uppkomst och beteckning; addition och subtraktion, med begränsning till sådana uppgifter, som innehålla bråk med liten gemensam nämnare; någon övning i multiplikation och division, dock endast sådana uppgifter, i vilka multiplikator och divisor äro hela tal; tillämpningsuppgifter. — Decimalbråk: de fyra räknesätten jämte tillämpningar; i multiplikation och division dock endast sådana uppgifter, i vilka multiplikator och divisor äro hela tal. — Särskilda huvudräkningsövningar. — Geometrisk kurs, omfattande linjer, vinklar, parallellogrammer och trianglar samt sådana kroppar, som hava förenämnda ytor till bas och mot basen vinkelräta sidor, och huvudsakligen avseende de nämnda storheternas uppritning, beskrivning och mätning i förening med enkla praktiska beräkningar.»

Sjätte klassen. »Fortsatt övning av de fyra räknesätten med hela tal; något fullständigare behandling av decimalbråk och allmänna bråk, dock med den begränsningen, att i fråga om allmänna bråk upptagas blott uppgifter, innehållande bråk med liten nämnare och med användning i det praktiska livet. — Procenträkning, huvudsakligen omfattande beräkning av ränta, av vinst eller förlust vid inköp och försäljning, av rabatt och provision samt av olika ämnens sammansättning. — Andra tillämpningsuppgifter av praktisk innebörd. — Särskilda huvudräkningsövningar. — Geometrisk kurs, omfattande utom redan behandlade ytor och kroppar jämväl förut icke upptagna fyrsidingar ävensom månghörningar och cirklar samt sådana kroppar, som hava förenämnda ytor till bas och mot basen vinkelräta sidor, och huvudsakligen avseende de nämnda storheternas uppritning, beskrivning och mätning i förening med enkla praktiska beräkningar.»

I kursen för sjätte klass i den sexklassiga folkskolan upptager undervisningsplanen även »förande av enkel kassabok» och »en och annan enkel fältmätningsövning».

Vi giva i det följande ett detaljerat förslag i fråga om lärogången vid behandlingen av bråkläran, till vilket hänvisas. I en liten detalj avviker det från undervisningsplanens bestämmelser, i det vi anse, att vissa divisioner med bråkdivisor skola behandlas redan i femte klassen. — Vid behandlingen av geometrikursen giva vi ock närmare förslag till den ordningsföljd, i vilken de olika momenten kunna behandlas.

Sjunde klassen. »Procent- och ränteuppgifter med användning, där så finnes ändamålsenligt, jämväl av enkla ekvationer; användning av tabeller med tillämpning exempelvis på försäkringar och sammansatt ränta; utrikes mynt; växlar; andra räkneuppgifter, valda med särskild hänsyn till det praktiska livets fordringar, i främsta rummet sådana, som ansluta sig till näringslivet i hembygden. — Särskilda huvudräkningsövningar. — Övning i enklare bokföring och i samband därmed ifyllande av vanliga post-, järnvägs- och ångbåtsblanketter samt uppgörande av enkel självdeklaration. — Geometrisk kurs, omfattande utom förut behandlade storheter något om ellipser, pyramider, koner och klot och huvudsakligen avseende storheternas uppritning, beskrivning och mätning i förening med enkla praktiska beräkningar. — Enkla övningar i grafisk framställning. — Enkla fältmätningsövningar.»

En del av de i denna klass upptagna momenten torde det vara lämpligt att också behandla i den sexklassiga skolans högsta klass, nämligen användningen av tabeller med tillämpning på sammansatt ränta och utrikes mynt.

I fråga om de svagare skolformerna givas i undervisningsplanen en del värdefulla råd, till vilka hänvisas. I en detalj vilja vi göra en invändning. Då femte och sjätte klasserna bilda en läraravdelning, tänker sig undervisningsplanen som en möjlighet, att »de båda klasserna i stor utsträckning hållas tillsamman och undervisas ena året huvudsakligen i allmänna bråk och andra året huvudsakligen i decimalbråk». Vi tro ej, att en sådan uppdelning av kursen är praktisk, och med det förslag till bråklärans behandling, som vi i det följande giva, låter sig icke en sådan kursväxling förenas.

Om taluppfattning och talbeteckning av hela tal.

§ 10. **Åskådningsmedel.**

Till en klar taluppfattning komma barnen naturligtvis endast på åskådningens väg genom att räkna antal av olika föremål. *Särskilda åskådningsmedel behövas*, dels sådana, som lämpa sig, när läraren skall demonstrera något för hela klassen, och dels sådana, som äro lämpliga att användas av barnen själva. Som demonstrationsföremål för talområdet till 10 lämpa sig bra träklotsar, gärna av en del olika former (minst 10 st. av var sort) och lagom stora för att vara väl synbara för alla i klassen. Barnen kunna använda smärre föremål, som de själva lätt kunna skaffa, t. ex. stenar, stickor, knappar, kastanjer. Ett utmärkt åskådningsmedel för talen till och med 10 ha barnen naturligtvis i fingrarna, och det vore onaturligt att ej utnyttja det. Härmed är ej den s. k. fingerräkningsmetoden rekommenderad. För inlärande av de grundläggande additionerna och subtraktionerna inom talområdet rekommendera vi annan metod. (Se längre fram.)

För åskådliggörande av större tal än 10 bör man hava ting, som lätt kunna förenas, så att ett antal av dem kan hanteras som en enkel kropp, vilket är av betydelse, då det gäller att belysa den grundläggande principen för talsystemets byggnad, nämligen bildandet av högre enheter (tiotal, hundratal etc.) ur grundenheten (entalet). För talområdet till 100 lämpa sig utmärkt stickor (t. ex. tändstickor), varav 10 st. hopbuntas (med en gummitråd) till en ny enhet (tiotalet). Detta åskådningsmedel passar bra att handhavas av barnen. Som demonstrationsföremål för talområdet till 100 är kulramen användbar, och för hela talområdet 1—1 000 kunna *kuber, pelare och skivor* rekommenderas. Kubernas kantlängd kan väl lämpligen vara ungefär 2 cm. Tio sådana kuber, ställda på varandra, bilda en *pelare*, som blir en konkret bild av tiotalet. Läraren bör ha till sitt förfogande ej blott lösa kuber utan även pelare, vilka uppfattas, som vore de hopfogade av tio kuber. Tio sådana pelare, ställda bredvid varandra, bilda en *skiva*, som blir en bild av hundratalet. Även sådana skivor bör läraren ha till sitt förfogande (minst 10 stycken). Och slutligen bör finnas en stor kub, »bestående» av 10 skivor, utgörande en bild av tusentalet. — Ett annat viktigt medel att åskådliggöra talen äro *talbilder*. Talet 7 kan t. ex. avbildas så: ⁚ ⁚ ⁚ · .

talet 10 så och vid större tal än 10 kan tiotalets karaktär av enhet åskådliggöras genom att tiogrupperna hållas i sär, t. ex. talet 35:

Meterstaven med alla dess indelningar ger också en åskådlig bild av talen.

För uppfattningen av de högre talsorterna, millioner, milliarder, billioner, trillioner spelar ej åskådningsmedel någon större roll. Det räcker egentligen, att barnen veta att 1 000 tusental är en million, etc. Men av ett visst värde är det dock att giva någon åskådlig uppfattning av deras storlek, t. ex. genom att låta barnen räkna ut, hur många mm. det går på en kilometer, hur lång tid det skulle ta att räkna till en million, etc.

§ 11. **Taluppfattning.**

Ett enskilt tal i heltalsserien kan definieras som det föregående talet + 1; alltså 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1 etc. För benämning och uppfattning av större tal måste högre enheter bildas. Vårt talsystem kan med hänsyn härtill sägas vara uppbyggt på talet 10 som grundtal. Av tio enheter bildas en ny (sammansatt eller högre) enhet eller talsort, med vilken vi räkna på alldeles samma sätt som med den enkla enheten (grundenheten). Och av tio tiotal bildas en ny talsort, hundratalet, etc. Med användande av ett helt ringa antal talord kunna vi så benämna en ofantlig mängd tal. Med 12 talord (ett, två etc. till tio samt hundra och tusen) skulle vi kunna giva namn åt alla talen upp till millionen. Talbeteckningen är ändå mera fulländad, ty med 10 taltecken (0, 1, 2 etc. till 9) kunna vi ju skriva alla tal, hur stora som helst.

Följande moment (a, b, c) kunna sägas vara betydelsefulla för en klar taluppfattning och måste behärskas av barnen.

a) Ingående kännedom om talen inom talområdet 1—10.

Det väsentligaste av denna kännedom vinnes under första skolåret, i det barnen med åskådningsmedlens hjälp komma till klar insikt om talens innebörd och lära sig utföra additioner och subtraktioner (och på senare stadium även multiplikationer och divisioner) inom talområdet. Själva uppfattningen av talen vinna barnen genom att medelst räkning: 1, 2, 3 etc. finna svaret på frågan hur många. Läraren ställer t. ex. fram några kuber, och barnen få räkna, hur många kuberna äro, eller få taga ut ett visst antal; sådana räkningar övas med många olika slags föremål, så att ej barnens taluppfattning obehörigen kommer att hänföra sig till ett slags föremål. Vid förmedlandet av taluppfattningen kunna även talbilder göra god tjänst, men mot ett överdrivet bruk av sådana bör framhållas, att det ej är genom inpräglande av någon viss geometrisk bild utan genom räkning av enheterna, som barnen komma fram till en klar taluppfattning. De förut nämnda räkneövningarna bli alltså det väsentliga.

b) Förmåga att räkna med sammansatta tal (tiotalen, hundratalen etc.), som om de vore enheter.

Det är säkerligen en stor svårighet för de små, när de skola börja räkna med tiotalet alldeles som med grundenheten.

Man märker ju även på ett betydligt högre stadium, hurusom införandet av räkning med en ny talsort (t. ex. en bråksort) vållar svårigheter. Och mången, som lärt algebra, har kanske ej fullt fattat innebörden i den algebraiska satsen $b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$, beroende på att fortfarande en viss svårighet har förefunnits att utföra den tankegång, som de små ställas inför, när de skola upptäcka, att man kan räkna med tiotal alldeles som med enkla enheter.

Då talområdet vidgats till 100, få barnen arbeta igenom detta med tiotalet som enhet på liknande sätt, som de arbetade igenom tiotalsområdet med entalet. (Ordet ental införes först i samband med införande av ordet tiotal.) Alltså räkningar som $30 + 40 = 70$, $90 - 60 = 30$, i analogi med $3 + 4 = 7$, $9 - 6 = 3$. Först genom sådana övningar vinna de en verkligt klar uppfattning av den nya enheten.

Under arbetet med talområdet till 20 förberedes denna uppfattning genom att talen inom andra tiotalsområdet sättas i relation till talet 10, och genom att barnen på ett åskådligt sätt få bilda och upplösa tiotalet, t. ex. genom hopbuntning av tio stickor och upplösning av bunten.

Efter behandlingen av talområdet till 20 synes det oss lämpligt, att talområdet genast vidgas till 100, så att tillräckligt stort talområde för övningar med den nya talsorten kan erhållas. Ha barnen rätt uppfattat räknandet med tiotalsenheten, bör ej sedan räknandet med hundratal och tusental bereda någon svårighet.

c) Kunskap om huru talen äro uppbyggda av talsorter och dessas förhållande till varandra samt säkerhet beträffande talens plats i den vanliga talserien.

Barnen böra beträffande t. ex. talet 4 327 ej blott kunna redogöra för att det består av 4 tusental, 3 hundratal, 2 tiotal och 7 ental utan ock kunna angiva *hela antalet* hundratal, alltså 43, och *hela antalet* tiotal, alltså 432. Den vanligaste formen, under vilken detta problem uppträder, hänför sig naturligtvis till konkreta sorter, t. ex.: hur många dm. äro 143 cm.?, hur många tioöringar eller enkronor eller tiokronor kan man få av 5 367 öre?

Svårigheten för barnen att angiva hela antalet av en viss talsort i ett tal sammanhänger väl i allmänhet med bristande säkerhet i talsorternas samband med varandra. Särskilt viktig är den noggranna *analysen av tusentalet*. Att tusen består av 100 tiotal, skola barnen veta lika säkert, som de skola veta, att det består av 10 hundratal eller 1000 ental. Barnen lära sig snart, hur lätt det är att ur talbeteckningen svara på hithörande frågor. Talet behöver ju endast utläsas till och med den siffra, som betecknar talsorten i fråga.

Den självklara fordran på säkerhet beträffande de enskilda talens plats i talserien kan synas onödig att framhålla, men erfarenheten visar, att barnens färdighet däri ofta lämnar åtskilligt övrigt att önska. Inom talområdet 1—100 få väl barnen alltid öva sig räkna upp alla talen i ordning, men inom de högre talområdena kan ju detta ej gå för sig. Övningen måste naturligtvis bestå i spridda uppräkningar inom talserien med koncentrering på svårare ställen. *Särskilt övergångarna mellan talsorterna böra flitigt övas.* Några exempel: räkna vidare från 129, från 996, från 3 597, från 9 989 etc.; räkna *baklänges* från 162, från 9 004 etc.; mellan vilka tal ligger 148, 1 000, 10 000 etc. Analoga uppräkningar av serier med annan differens än 1 äro också nyttiga, t. ex. med 2 (97, 99, 101 etc.), med 10, med 100 (9 700, 9 800 etc.).

§ 12. Talbeteckning.

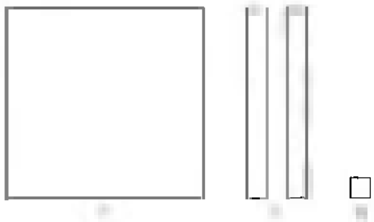
Till en klar taluppfattning bidrager även den vanliga talbeteckningen, dock först i fråga om talen över 10, där talbeteckningen anger talens sammansättning av talsorter. Vid den första räkneundervisningen bör man t. o. m. akta på att ej för tidigt börja använda de vanliga siffrorna, då de ej på något sätt bidraga till att giva barnen en klar taluppfattning men väl skada, i det barnens uppmärksamhet drages till tecknet i stället för till saken; i all synnerhet så länge själva skrivandet av siffrorna för barnen är en uppgift, som kräver uppmärksamhet. Innan siffrorna användas vid räkneundervisningen böra barnen därför ha övats med deras skrivning. Siffrorna böra ej komma till användning förr än tidigast under andra terminen av första läsåret, men deras skrivning bör flitigt övas redan under första terminen. Dock behöver man ej under hela denna tid sakna all talbeteckning vid räkneundervisningen, men man bör använda en *åskådlig beteckning*, som kan bliva en hjälp vid taluppfattningen; naturligast synes vara att låta talbilden med raka, lodräta streck vara den första talbeteckningen. Till en början få barnen beteckna talen ända upp till 10 med sådana streck. Vi skulle emellertid vilja rekommendera, att rätt snart den förenklingen genomföres, att de romerska siffrorna i stället användas. Detta innebär ju knappt annat än att tecknet |||| utbytes mot V. Detta teckens form få barnen förklarad genom jämförelse med handens fingrar: den ena stapeln är en bild av tummen, den andra av de övriga fyra fingrarna. Vid användning av de romerska siffrorna märkes att fyra naturligtvis ej tecknas IV utan IIII, nio ej IX utan VIIII. Tecknet X få barnen lära sig uppfatta som sammansatt av två romerska femmor, den ena upp- och nedvänd och ställd under den andra. Naturligtvis kunde också beteckningen VV användas, men dels kan det vara bra att låta tiotalet i beteckningen framträda som en enhet, dels är det lämpligt att barnen få lära sig den brukliga beteckningen. Utom dessa tecken användes det vanliga tecknet för noll, 0.

Med den goda talbeteckning, som de romerska siffrorna utgöra för de små talen, hastar det ej med att införa de arabiska siffrorna, och man kan vänta, tills barnen blivit fullt förtrogna med talområdet 1—10, och tills de förvärvat god färdighet i de arabiska siffrornas skrivande. Efter införandet av den vanliga sifferbeteckningen övas barnen att med denna beteckning återgiva de förut genomgångna satserna.

Då den vanliga talbeteckningen för större tal än tio skall inläras, kan lämpligen följande tillvägagångssätt användas. Barnen få ställa upp t. ex. 12 kuber genom att ställa upp en pelare och två lösa kuber (pelaren till vänster om kuberna). Sedan avbildas detta på tavlan:

1 2

och antalet av varje sort sättes inunder, och så är talet skrivet. Sedan inses lätt, hur tio skall skrivas. Metoden för större tal blir densamma. T. ex. etthundratjugoett: en skiva, två pelare och en liten kub uppställas och avbildas:



Och om en skiva men ingen pelare och ingen kub ställes upp, kan det ju betecknas med 100.

Om de olika räknesätten, deras innebörd och beteckning. Terminologiska frågor.

§ 13. Antalet räknesätt, eller grundoperationer vid räknandet, anses ju gärna vara fyra, addition, subtraktion, multiplikation och division, liksom fyra operationstecken bruka användas, ett för varje räknesätt. Under samma namn och beteckning sammanfattas emellertid i vissa fall mycket skilda tankegångar. Vid den grundläggande undervisningen i folkskolan är det av stor vikt, att tankegången verkligen klart genomgås och icke suddas bort med användande av ord, täckande vitt skilda begrepp. »Räknesättsräknandet» har blivit illa beryktat just genom den oklarhet, som lätt smyger sig in, när barnen angiva addition, subtraktion, multiplikation eller division som det räknesätt, som skall användas vid en uppgifts lösning. Gissningar på mycket lösa grunder bli gärna följden, om verklig förståelse av räknesättet saknas och det endast kan gälla att välja mellan några få möjligheter. Gissas det på multiplikation och det visar sig vara fel, så försökes med division etc. Då man betänker, att *framgången av räkneundervisningen framförallt är beroende av att barnen rätt kunna använda räknesätten*, förstår man, hur betydelsefullt det är, att intet missgrepp från lärarens sida göres i denna punkt. Gissningsofoget kan förhindras dels genom att läraren verkligen klarlägger de olika tankegångar, som ligga bakom räknesätten, och dels genom att barnen vänjas vid att redogöra för tankegången med användande av så enkla och tydliga uttryck (alltså svenska) som möjligt. Framför allt beträffande räknesättet division är ett giv akt av nöden, men även de övriga räknesättens innebörd kan det vara skäl att något beröra.

§ 14. **Addition och subtraktion.**

Räknesätten *addition* och *subtraktion* bruka väl ej bereda några egentliga svårigheter. En noggrann analys kan dock visa, att i någon mån skilda tankegångar ligga bakom vartdera av dessa räknesätt, vilket bör observeras vid den grundläggande räkneundervisningen, så att barnen från början få en klar uppfattning av räkneoperationerna. Operationen ökning eller tilläggning är ej alldeles densamma som operationen sammanläggning, vilket än tydligare framgår vid jämförelse mellan de motsvarande subtraktionerna. Mot ökningen eller tillläggningen svarar minskningen eller fråndragningen, och mot sammanläggningen svarar itudelningen eller uppdelningen.

Innebörden av operationen ökning eller tilläggning är för barnen mycket lättfattlig, likaledes minskningen eller fråndragningen. Att en sammanläggning kan verkställas genom ökning är ju också klart, likaledes att itudelning eller uppdelning kan ske genom fråndragning. Någon annan uppmärksamhet behöver knappast ägnas häråt, än att uppgifterna ej blott skola handla om att lägga till utan ock om att lägga samman, ej blott om fråndragning utan ock om bestämning av en del, när den andra är given.

Men viktigare är att observera, att den tankegång, som ligger bakom beräkning av *skillnaden* mellan två tal, behöver klarläggas. För barnen är det ej självklart, att detta är en fråndragningsuppgift. När Knut har 12 öre och Arne 9 öre och det gäller att finna ut, hur mycket Arne har mindre än Knut, kan en uppmaning till fråndragning förefalla som en meningslöshet, då man ej kan draga Arnes pengar från Knuts. Tankegången kan naturligtvis utan större svårighet klaras upp med hjälp av åskådningsmedel, men förklaringen bör göras med omsorg, så att verkligen alla barnen fatta begreppet skillnad och förstå, att skillnaden kan bestämmas genom fråndragning. Så krävs också övning på ett tillräckligt antal exempel. Läroböckerna innehålla ofta ett för ringa antal exempel på skillnadsberäkning. Det bör naturligtvis ej alltid vara skillnaden, som beräknas, utan skillnaden och det ena talet kunna vara givna och det andra talet sökas.

§ 15. **Multiplikation.**

Att mutiplikation har upptagits som ett särskilt räknesätt, kan synas egendomligt, då man tänker på dess nära samband med additionen. Är det ej samma tankegång bakom dessa båda räknesätt? Att multiplikation uppfattas som ett från addition skilt räknesätt, beror väl närmast dels på olikheten i beteckningen och dels på existensen av en från additionstekniken skild multiplikationsteknik. Sammanläggning av ett stort antal lika termer, som ofta förekommer i praktiken, kan nämligen ske på ett väsentligt enklare sätt, än det, som brukar användas vid addition, och den vanliga additionsbeteckningen skulle för detta fall bliva synnerligen obekväm att använda.

Men en begreppsolikhet kan ock sägas förefinnas. Vid additionen $2 + 2 + 2$ ägna vi icke någon uppmärksamhet åt hur många delarna äro eller deras inbördes storlek, medan vid multiplikationen $3 \cdot 2$ tanken just är inställd därpå, i det vi behandla dessa lika stora delar som enheter. $3 \cdot 2 = ?$ betyder en fråga, hur mycket (uttryckt i grundenheten) 3 stycken av talet två blir. Multiplikation är alltså ett räknesätt, i vilket värdet[1] av ett givet antal av någon viss talsort beräknas. Man bör se till, att barnen uppfatta den vanliga multiplikationsbeteckningen så, att det första talet angiver, hur många som skola tagas av den talsort (»sammansatta» talenhet), som det senare talet betecknar. $6 \cdot 5$ betyder 6 stycken av talet fem (femtal) och $7 \cdot 12$ betyder 7 stycken av talet tolv (dussin).

Ordet stycken användes lämpligen allt emellanåt till omväxling med ordet gånger, i all synnerhet när talsorten har särskilt namn (par, dussin, tjog).

Med denna uppfattning av multiplikationen bereder det ej några svårigheter att inse innebörden i multiplikation med bråkmultiplikator — en utvidgning av multiplikationsbegreppet, som lätt kan vålla bryderi såväl för läraren som barnen, och som mycket diskuterats i räkneundervisningens metodik. Det är dock ganska tydligt, att likaväl som 2 dussin kan betecknas $2 \cdot 12$, så bör $2\frac{3}{4}$ dussin kunna betecknas $2\frac{3}{4} \cdot 12$ och $\frac{3}{4}$ dussin $\frac{3}{4} \cdot 12$. Den första faktorn i alla dessa fall angiver antalet dussin och enligt den givna förklaringen av multiplikationsbeteckningen kan ej någon tvekan råda om att den bör användas i dessa fall. På frågan, hur många dussin, eller vilket antal dussin, kan svaras $2\frac{3}{4}$ lika naturligt som 2, och även svaret $\frac{3}{4}$ är ej besynnerligt, fast vi i det fallet nog hellre vilja svara med ett »bara 3 fjärdedels dussin».

I fråga om benämning och beteckning är det mycket viktigt, att en bestämd överenskommelse följes med hänsyn till första och andra faktorns betydelse.

Det mest praktiska och hos oss brukliga är att låta första faktorn vara multiplikator och andra multiplikand. $2 \cdot 12$ betyder alltså 2 stycken av talet tolv (2 dussin), medan $12 \cdot 2$ be-

[1] *Anm.* Vid räkning med hela tal uttryckes värdet i grundenheten, vid bråkräkning dessutom ofta i någon viss bråksort.

tyder 12 stycken av talet två (12 par). Läraren bör synnerligen noggrant se till, att barnen alltid iakttaga denna regel. Vid frågan: hur mycket kostar 175 stycken efter ett pris av 2 kr. pr styck? bör aldrig svaret 2 gånger 175 kr. eller beteckningen 2 · 175 kr. godkännas. Det måste svaras 175 gånger 2 kr. och tecknas 175 · 2 kr. Hur svaret sedan skall uträknas blir en sak för sig. Sedan barnen förstått att 175 · 2 leder till samma resultat som 2 · 175, kan man tillåta dem att använda den uträkningsmetod, som faller sig bekvämast. Men denna omkastning bör ej göras utan giltiga skäl, och barnen skola alltid veta, att de för underlättande av uträkningen hava gjort omkastningen. Men den beteckning, barnen först giva av uppgiften, måste vara korrekt. I det nämnda exemplet skola de alltså först teckna uppgiften som 175 · 2 kr., även om de vid uträkningen omkasta och räkna

$$\begin{array}{r} 175 \\ \cdot\, 2 \\ \hline 350 \end{array}$$

Bakom detta krav ligger en elementär fordran på tankereda, och försummar läraren att upprätthålla det kravet, gör han barnen en verklig otjänst, i det han tillåter dem att i en så central punkt som ett räknesätts innebörd operera med oklara begrepp.

Två multiplikationstecken äro brukliga, · och ×. Barnen böra känna till båda, men det synes oss, som om det vore mest praktiskt att vänja barnen att använda punkten (·), då ju tecknet × ej bör användas vid lösningen av ekvationer, enär det förväxlas med x-tecknet.

§ 16. **Division.**

Den viktigaste anmärkningen om räknesättens innebörd hänför sig till *divisionen.* Mycken oklarhet i räkneundervisningen uppkommer, om ej de två väsentligt skilda tankegångar uppmärksammas, som ligga bakom detta räknesätt. Dessa tankegångar äro så olika, att barnen böra uppfatta dem som två skilda räknesätt med olika namn och beteckning och lika strängt hålla dem i sär som de andra räknesätten. I den grundläggande undervisningen skulle man alltså kunna sägas ha fem räknesätt i stället för de sedvanliga fyra. De båda divisionsarterna bruka ju kallas delnings- och innehållsdivision. Namnet division kan lämpligen sparas till den tidpunkt, då man vill hava ett gemensamt namn på båda räknesätten, vilka helt enkelt kunna kallas delning (kanske ändå hellre delberäkning) och innehållsberäkning. Till belysande av räknesättens olikhet må följande två exempel tjäna: 1) »Tio pojkar skulle lika dela ett 60 dm. långt snöre, hur stor bit kunde vardera få?» 2) »Några pojkar delade lika mellan sig ett 60 dm. långt snöre, så att var och en fick 10 dm.; till hur många pojkar räckte snöret?» Båda exemplen skola lösas genom division av 60 med 10, men det är uppenbart, att tanken får gå ganska olika vägar i de båda fallen. I ena fallet tänka vi snöret delat upp i tio lika stora delar och söka bestämma, hur många decimeter en sådan del är; i andra fallet ha vi tänkt över, hur många gånger en bit av 10 decimeters längd kan tagas ur snöret. Det är alldeles tydligt, att ett barn, som vid den sista uppgiften svarar, att man skall dela med 10 och tänker på en uppdelning i 10 delar, *ingenting* begriper av problemets lösning, ty att tiondelens längd kan tala om, hur många pojkarna äro, har barnet säkerligen i alla händelser ingen tanke på.

Olikheten mellan de båda delningarna framträder ock, om det gäller att i verkligheten utföra dem. Om man anmodas att dela upp en hop kulor i åtta lika högar, så förfar man ej på samma sätt, som om man anmodas att dela upp hopen i högar om åtta kulor i varje. Det kan ju hända, att någon vid den förra uppgiften varje gång ur den stora högen tar ut åtta kulor (såsom säkerligen sker vid den senare uppgiften) och fördelar dem med en kula i varje hög, men sannolikare är, att han tar ut (en eller) några stycken kulor och lägger dem i en hög, därefter återigen lika många, som läggas i en annan hög, etc., tills han har åtta lika stora högar, varefter förfaringssättet upprepas, tills alla kulorna äro fördelade i åtta lika högar.

Båda divisionerna kunna ju uppfattas som omvändningen av multiplikation, men skillnaden mellan dem kan, med användande av den vanliga latinska terminologien i fråga om multiplikation, begreppsmässigt lätt uttryckas på följande sätt. Vid innehållsdivision efterfrågas *multiplikatorn* (medan produkten och multiplikanden äro kända), vid delningsdivision efterfrågas *multiplikanden* (medan produkten och multiplikatorn äro kända).

Med hänsyn till det, som nu uppvisats angående tankeinställningens olikhet, blir fordran, att de båda divisionerna strängt skola hållas isär, ganska uppenbar. Säkerligen är en bristfällig undervisning på denna punkt i många fall skuld till att räkneundervisningen misslyckas. Då barnen kommit in på en av divisionstankevägarna, och denna ej leder till målet, kunna de ej förstå, att problemet skall lösas genom »division». När de så ändå få lära sig, att det skall vara division, uppkommer lätt hos dem föreställningen, att det ej går att riktigt begripa, vilket räknesätt som skall användas, och så använda de olika mindervärdiga knep och gissningar för att klara sig. Och så har undervisningen misslyckats *i sin mest centrala uppgift, nämligen att bibringa förståelse av de grundläggande räkneoperationer*, som behövas för räkneuppgifternas lösning.

För att klarhet skall vinnas, måste åskådningsmedlen flitigt användas ej blott vid första inlärandet, utan vid varje tillfälle, då läraren hos barnen märker någon oklarhet beträffande räkneoperationernas innebörd.

Mycken omsorg måste ock ägnas åt de *uttryckssätt, som användas*. Det bör av dem tydligt framgå, vilken av divisionerna det är fråga om. Allt efter omständigheterna kunna olika uttryck vara lämpliga, t. ex. vid en delningsdivision med talet 3: »dela lika mellan 3 barn och taga reda på, hur mycket varje barn får», eller »dela i 3 lika stora delar och taga reda på, hur stor varje del blir». Ett kort och utmärkt uttryck är *tredjedelen av* (då därigenom utsäges, att det hela skall delas i 3 lika delar, och att storleken av en sådan del skall bestämmas). Uttrycket »dela med 3» är ej tillräckligt tydligt och hänvisar ej direkt på delberäkningen. Detta uttryck skulle kunna användas som en översättning av dividera med och alltså kunna användas som gemensam benämning för båda divisionerna.

Lämpliga uttryck vid en innehållsdivision äro t. ex. »3 innehålles i 12 4 gånger», eller »12 innehåller 3 4 gånger», eller »3 i 12 går 4 gånger». Naturligtvis kunna allt efter uppgiftens beskaffenhet flera andra uttryck användas, och man bör ej sträva efter stereotypi. Huvudsaken blir att uttrycket är tydligt.

Även genom beteckningen böra de båda räknesätten skiljas åt. Det vanliga divisionstecknet användes till en början endast för innehållsdivision, medan för delningsdivision bråkbeteckningen torde vara lämpligast. 60 dm. innehåller 6 dm. 10 gånger tecknas alltså 60 dm. : 6 dm. = 10 gånger, eventuellt utan utsättande av ordet gånger, och sjättedelen av 60 dm. är 10 dm. tecknas $\frac{1}{6}$ av 60 dm. = 10 dm. Längre fram, kanske lämpligen under fjärde skolåret (senast), få barnen lära att använda tecknet : även för delningsdivision. Men en olikhet kvarstår dock i beteckningen. Beteckningen för delningsdivision blir 60 dm. : 6 = 10 dm. och för innehållsdivision 60 dm. : 6 dm. = 10. Läraren bör noggrant tillse, att barnen korrekt utsätta sorterna.

Som motivering för införandet av samma operationstecken kan användas den upptäckt, barnen lätt nog göra, nämligen att vid räkning med obenämnda tal resultatet av beräkningen blir detsamma, vare sig beteckningen uppfattas såsom hänförande sig till en delberäkning eller innehållsberäkning.

6 i 60 blir 10 liksom $\frac{1}{6}$ av 60. Båda tecknas därför på samma sätt 60 : 6.

Vi ha här uteslutande uppehållit oss vid division med helt tal. Utredningen av innebörden av division i bråk är ett något komplicerat kapitel, men om barnen ordentligt uppfattat och blivit förtrogna med multiplikation med bråkmultiplikator, är den svåraste stötestenen undanröjd. Vi uppskjuta behandlingen av denna sak till framställningen av bråkläran. (Se sid. 81 ff.)

§ 17. Några terminologiska frågor.

En god terminologi är naturligtvis en viktig sak, och läraren kan, särskilt då det gäller att bibringa barnen förståelse av räkneoperationernas innebörd, få god hjälp av terminologien. I stället för de många latinska namnen på i de olika räknesätten ingående storheterna (addend, minuend, etc.) kan användas tre svenska ord: det hela, delarnas antal och delarnas storlek (enl. förslag av K. P. Nordlund). Man inser genast, hur uppklarande denna terminologi blir i fråga om sambandet mellan räknesätten. I addition äro delarnas storlek känd, och det hela sökes, i subtraktion äro det hela och den ena av två delar kända, och den andra delens storlek sökes, i multiplikation äro delarnas antal och storlek kända, och det hela sökes, i delningsdivision äro det hela och delarnas antal kända, och delarnas storlek sökes, i innehållsdivision äro det hela och delarnas storlek kända, och delarnas antal sökes. Man ser, hurusom genast olikheten mellan de båda divisionerna uppdagas, medan vid terminologien dividend, divisor, kvot ingenting märkes av denna olikhet. Dessa svenska namn hänföra sig närmast till heltalsläran och kunna tyvärr ej utan vidare utsträckas till räkneoperationerna med bråktal. Att i $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ kalla 9 det hela och 12 delarnas storlek går ju inte an. Då ej svenska namn, passande för både heltalsläran och bråkläran kunna erhållas, blir det väl bäst att införa några latinska termer. En del av dessa ha dessutom så ingått i det allmänna språkbruket, att barnen ej böra lämnas i okunnighet om deras betydelse. Till dessa höra summa, rest, faktor, produkt[1]. Med dessa skulle man också kunna reda sig. Sedan barnen till en början använt den nämnda svenska terminologien få de (i tredje eller senast i fjärde årskursen) lära sig, att vid addition det hela kallas summa, att vid subtraktion den sökta delen

[1] Anm. Även med de övriga latinska termerna böra barnen stifta någon bekantskap. Läraren kan med barnen genomgå termernas betydelse och låta barnen uppskriva dem (om de ej finnas i läroboken), men om något inlärande bör det ej vara fråga.

kallas rest, och att vid multiplikation det hela kallas produkt. Som gemensamt namn för delantal och delstorlek vid multiplikation användes ordet faktor. Även för division skulle de nämnda termerna kunna duga, nämligen produkt för dividenden och faktorer (känd och sökt faktor) för divisor och kvot. Av vikt är, att barnen redan vid heltalsläran bliva förtrogna med denna latinska terminologi (särskilt produkt och faktorer), så att ej sambandet mellan multiplikation och division i heltalsläran och i bråkläran genom ändring av terminologien avbrytes.

K. P. Nordlund har, närmast för räkning med brak i multiplikation och division (vilka namn dock ej användas, då Nordlund helt slopar »räknesättsräknandet») föreslagit orden förhållande, den föregående och den efterföljande storheten. I divisionen 9 m. : 12 m. — $\frac{3}{4}$ är 9 m. den föregående storheten, 12 m. den efterföljande och $\frac{3}{4}$ förhållandet. Med begreppet och ordet förhållande böra barnen visserligen bliva förtrogna, men det torde ej vara praktiskt att använda det som en räknesättsterm i stället för delantal eller faktor, och termerna den föregående och efterföljande storheten äro för intetsägande och olämpliga.

Räknesättens och räkneteckneus latinska namn böra barnen lära sig att använda, dock naturligtvis ej genast. Till en början användas uteslutande de svenska namnen. Under tredje skolåret synes det oss lämpligt att införa räknesättsnamnen addition, subtraktion och multiplikation. Namnet division införes vid det tidsmoment, då man vill hava en gemensam benämning för de båda divisionsräknesätten.

Ytterligare några terminologiska frågor kan det vara skäl att här beröra. Särskilt K. P. Nordlund har strängt gått till rätta med brister inom räkneundervisningen beträffande terminologien.

Ordet *siffra* användes mycket ofta felaktigt, nämligen i stället för ordet tal. Siffran är naturligtvis taltecknet och ej talet självt. »Med vilken siffra skall du nu multiplicera?» torde vara en vanlig fråga, men man kan ej multiplicera med en siffra utan endast med ett tal. Även ordet tal användes ofta olämpligt, t. ex. tal i stället för räkneuppgift.

Uttrycken större än och mindre än användas ofta på ett ologiskt sätt. 12 är ej 4 gånger större än 3 utan 4 gånger så stort som 3. 3 är ej 4 gånger mindre än 12 utan $\frac{1}{4}$ av 12. Härtill måste dock anmärkas, att uttryck som »12 är 4 gånger större än 3» så ingått i det allmänna språkbruket, att de torde bliva svåra att utrota. Klokast synes vara att acceptera uttrycket och lära barnen dess hävdvunna betydelse. Men i så fall bör ett uttryck som »12 är en halv gång större än 8» undvikas.

Ordet tiotal (hundratal etc.) användes numera som benämning på själva talsorten men borde väl egentligen hänföra sig till antalet av talsorten i fråga. I t. ex. 30 skulle talet 3 angivas såsom varande tiotalet. Även i detta fall torde det vara klokt att anpassa sig efter det språkbruk, som slagit igenom, och med tiotal mena talet 10, uppfattat som en högre talenhet eller talsort. Denna terminologi kan så konsekvent utbyggas med bildande av ord som tvåtal, femtal, tolvtal etc. för att utmärka, att ett helt tal uppfattas som en talsort.

Addition och subtraktion i hela tal.

§ 18. Behandling av talområdet 1—10.

Sedan talserien till 10 införts och barnen fått en första uppfattning av dessa tal, vidtager ett närmare studium, bestående av additioner och subtraktioner inom talområdet. De grundläggande *additionssatserna* härledas genom uppräkning av enheterna. Skall t. ex. 3 läggas till 5, kunna barnen få räkna en grupp av 3 föremål och en annan grupp av 5 och så lägga de 3 till de 5 och räkna antalet efter hopläggningen. I allmänhet är det dock bättre, att barnen, sedan de räknat antalet föremål i de båda grupperna, lägga de 3 föremålen ett och ett till de 5, under det de successivt räkna 6, 7, *8*, alltså 5 och 3 är 8.

Vid tilläggning av 5 föremål till 3 räkna barnen på samma sätt 4, 5, 6, 7, *8*. Men läraren kan påpeka för dem, att det vore behändigare att lägga 3 till 5, vilket naturligtvis ger samma resultat. Genom sådan omkastning göres det ock möjligt för barnen att lösa en sådan uppgift utan hjälp av räkning av konkreta ting, alltså som ren huvudräkning. Däremot kunna de ej hålla ihop, hur många de lagt till vid uppräkningen 4, 5, 6, 7, 8. Man kan ej begära, att barnen skola vid sådan huvudräkning kunna lägga till fler än 4.

Lämpligheten av sådan huvudräkning betonas starkt av den tyske räknemetodikern H. Haase i dennes arbete Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts (finnes i svensk översättning i Pedagogiska skrifter, utgivna av Sveriges allm. folkskollärarförenings litteratursällskap). Haase rekommenderar just den nämnda omkastningen av 3 + 5 till 5 + 3. Uträkningen verkställer H. med användning av ordningstalen, t. ex. till 5 äpplen lades 3, nämligen det sjätte, sjunde och åttonde (åskådningsföremålen uppställas under en streckrad: | | | | | | | |, så att deras ordningsnummer lätt synes).

Fråndragningssatserna kunna härledas alldeles analogt med tilläggningssatserna. T. ex. fråndragning av 3 äpplen från 8 äpplen utföres med fråndragning av ett i sänder under räknande 7, 6, 5; alltså 5 äpplen kvar. Även denna uträkning går mycket lätt att flytta över till en fråndragning i tanken. Men fråndragning av 5 från 8, som barnen kunna utföra i verkligheten genom räknande 7, 6, 5, 4, *3*, orka de ej med att så utföra i tanken. Haase rekommenderar den utvägen, att barnen få besinna sig på *vilka som stå kvar*, när 5 drages från, nämligen det sjätte, sjunde och åttonde, alltså 3. Detta förfaringssätt synes oss dock ej så trevligt. Naturligare synes vara att låta barnen efter sammanläggningsövningarna och före nu diskuterade fråndragningar öva sig i *uppdelning av resp. tal*, t. ex. i fråga om åtta 8 = 7 + 1, 8 = 6 + 2, 8 = 5 + 3, etc. Vid dessa uppdelningsövningar kunna talbilder göra en god tjänst, t. ex. , varav barnen genast se de olika delarna (8 = 5 + 3). Sedan barnen övats häri, kunna de även i tanken lösa en fråndragningsuppgift som 8—5, ty när den ena delen är 5, är den andra 3 och 8—5 alltså lika med 3. Med hänsyn härtill torde det vara lämpligast, att vid undervisningen behandla det ena talet efter det andra från 1 till 10, varvid ett tal behandlas, först sedan det närmast föregående utförligt studerats. En monografisk behandlingsmetod alltså, men ej den allsidiga, av Grube rekommenderade, ty endast räkneoperationerna addition och subtraktion skola komma till användning. — Exempel: vid talet 6 få barnen utföra följande operationer:

tilläggningar: 5 + 1, 4 + 2, 3 + 3, 2 + 4, 1 + 5;
uppdelningar: 6 = 5 + ?, 6 = 4 + ?, 6 = 3 + ?;
fråndragningar: 6 — 1, 6 — 2, 6 — 3, 6 — 4, 6 — 5, 6 — 6.

Uppdelningsövningarna kunna anordnas på det trevliga sättet, att barnen få gissa, t. ex. hur många nötter läraren har i var hand, när de få veta, att han i båda händerna tillsammans har 6 nötter.

Övningarna inom talområdet 1—10 skola fortsättas, tills barnen nå fram till en mekanisk färdighet, alltså veta resultatet av alla möjliga additioner och subtraktioner utan att behöva fundera därpå. — Som hjälpmedel vid de nu behandlade räkningarna vilja barnen naturligtvis gärna använda fingrarna, och något ont ligger egentligen inte däri, men läraren måste i så fall energiskt se till, att barnen ej »hänga fast» vid fingerräknandet utan lära sig satserna som ren minnessak.

Först sedan barnen nått fram till sådan färdighet, övergår man till nästa talområde.

§ 19. **Behandling av talområdet 1—100.**

a. Enligt den föreslagna kursplanen behandlas först talområdet till 20.

Lärogången kan lämpligen vara följande:

1) Add. och subtr. inom andra tiotalsområdet. (Ex. 12 + 6 = 18, 17 — 5 = 12).

Dessa räkningar erbjuda inga svårigheter, då barnen uppfattat talen 11—20 som bestående av två delar, varav den ena är 10. Följande moment (2) blir då också enkelt.

2) Add. och subtr. av 10 (Ex.: 6 + 10 = 16, 17 — 10 = 7).

3) Add. och subtr., vid vilka övergång från ena tiotalsområdet till det andra sker. (Ex.: 7 + 8 = 15; 12 — 5 = 7.) Dessa räkningar äro oneklligen ganska svåra för barnen. Men om de förut säkert behärska talområdet 1—10 och med lätthet kunna företaga alla möjliga uppdelningar av talen inom detta område i tvenne delar, äro svårigheterna dock mycket väl överkomliga. 8 + 7 räknas så: 8, 10, 15, d. v. s. av 7 tages så mycket som behövs för utfyllnad av tiotalet, alltså 2, och resten av 7 (alltså 5) lägges till 10. Vid 12—5 räknas 12, 10, 7, d. v. s. först frändrages 2 och så 3, som erhölls vid uppdelning av 5 i 2 och 3. Genom mycken övning lära sig barnen att helt hastigt passera över tiotalet, så att de praktiskt taget omedelbart verkställa uträkningen.

b. Sedan talområdet till 20 behandlats, utvidgas det till 100.

Övningarna i addition och subtraktion kunna tagas t. ex. i följande ordning:

1) Add. och subtr. av rena tiotal till rena tiotal.

(Ex. 30 + 40 = 70, 100 — 60 = 40).

Genom att omedelbart efter uppräkningen och uppfattningen av de nya talen låta dessa övningar följa, skärper man barnens uppfattning av de inlärda talen, i det att tiotalets karaktär av högre enhet klarlägges.

2) Add. och subtr. av ental, utan överskridande (men väl utfyllnad) av något tiotalsområde.

(Ex.: 32 + 7 = 39, 38 + 2 = 40).

3) Add. och subtr. av rena tiotal till blandade tal.

(Ex.: 32 + 40 = 72, 67 — 20 = 47).

4) Add. och subtr. av ental, vid vilka överskridande av något tiotalsområde äger rum.

(Ex.: 37 + 4 = 41; 65 — 9 = 56).

5) Övriga add. och subtr. inom talområdet.

(Ex.: 35 + 43 = 78, uträknas som 35 + 40 + 3; 34 + 48 = 82, uträknas som 34 + 40 + 6 + 2; 42 — 28 = 14, uträknas som 42 — 20 — 2 — 6).

c. Den vanliga skriftliga additions- och subtraktionsmetoden.

I småskolans andra klass skola barnen börja inlärandet av den vanliga additions- och subtraktionsmetoden vid skriftlig räkning. Man visar upp för barnen, att, om man har tillfälle att skriva upp de tal, som skola adderas eller subtraheras, en bekvämare metod finnes än den, som vanligen brukas vid huvudräkning. Skriver man talen *under* varandra med liknämnda talsorter under varandra, utföres räkningen lättast så, att varje talsort behandlas för sig. (Vid uppskrivning av talen efter varandra användes ofta samma metod som vid ren huvudräkning). Vid huvudräkning av t. ex. 37 + 45 räknas kanske så 37 + 40 + 5; men vid skriftlig räkning läggas entalen tillsammans för sig och tiotalen för sig. Om man så vill, kan man till en början låta barnen använda följande skriftliga uppställning och uträkning:

37	7 och 5 är 12, med uppskrivning av
+ 45	talet 12, samt 3 tiotal och 4 tiotal
12	är 7 tiotal, med uppskrivning av talet
70	70; samt förnyad sammanläggning av
[illegible]	12 och 70.

Denna uppställning, som för övrigt visst icke är opraktisk, förenklas dock snart till den mest brukliga. Barnen få alltså tänka på att 12 består av 1 tiotal och 2 ental samt skriva tvåan i entalskolumnen och så antingen hålla tiotalet i minnet eller uppteckna det över tiotalsraden, alltså

$$\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +\,45 \\ \hline 82 \end{array}$$

Naturligtvis åskådliggöres tillvägagångssättet t. ex. genom hopbuntning av stickor eller växling av ettöringar till tioöringar etc.

Den skriftliga subraktionen utföres och åskådliggöres på alldeles analogt sätt. Först exempel utan »lån» och sedan med »lån». Skall 32 öre tagas bort från 58, så är det ju mycket naturligt att taga bort dels 2 öre från de 8 och dels 3 tioöringar från de 5, med uppställningen

$$\begin{array}{r} 58 \\ -\,32 \\ \hline 26 \end{array}$$

Vid »lån» kan uppställningen av räkningen gestalta sig så som följande exempel visar. 14 öre skola dragas från 32 öre.

$$\begin{array}{r} 2\,1\,2 \\ \cancel{3}\;\cancel{2} \\ -\,1\;\;4 \\ \hline 1\;\;8 \end{array}$$

Eftersom 4 öre skola tagas bort, måste vi växla en tioöring. Då få vi inalles 12 ettöringar, och kunna till en början några gånger skriva de förändringar som vidtagits på bredvidstående sätt.

Så tagas 4 ettöringar bort från de 12, och 8 blir kvar, och 1 tioöring tages från de 2, och 1 blir kvar.

Naturligtvis bryr sig ej den vane räknaren om att skriva över på detta sätt utan håller de vidtagna ändringarna i minnet. Praktiskt synes det oss dock vara att på något sätt antyda den siffra, från vilken det lånats, t. ex. genom en punkt över den, alltså

543
[illegible]
446

Denna beteckning synes oss trevligare än överstrykningen av siffror, alltså än

$$\begin{array}{r} \cancel{5}\cancel{4}3 \\ -\,97 \\ 446 \end{array}$$

§ 20. *Behandlingen av de högre talområdena* blir i princip densamma som av talområdet till 100 och behöver ej närmare omtalas. Den skriftliga räkningen blir naturligtvis alltmera av nöden ju större talen äro, men huvudräkning bör dock flitigt övas, särskilt de lättare uppgifterna inom 10 000-talsområdet, t. ex. 320 + 470, 1 250 + 1 380, särskilt i form av räkning med kronor och ören, som 17 kr. 50 öre + 21 kr. 75 öre. Något egentligen nytt uppträder ej, så barnen begripa synnerligen lätt räkneoperationerna. Någon liten särskild uppmärksamhet behöver kanske ägnas åt det fall, då »lån går över noll». Många barn i gamla tidens skolor undrade nog ibland över regeln att »när lån går över noll, blir det nio!» Vid en första genomgång kan man gärna skriva över, t. ex.

6 912
[illegible]
— 2 9
6 7 3,

och om förklaringarna åskådliggöras med hjälp av kronor, tioöringar och ettöringar, ha barnen inga svårigheter att förstå dem.

Additionstekniken är lätt att begripa, men är svår att lära sig säkert behärska i praktiken, ty det gäller ofta att utföra *sammanläggningar av en stor mängd termer*, varvid fel lätt kunna begås. Med uträknandet av långa additionstal måste man därför åtskilligt syssla i skolan, och barnen måste utföra dem så, att de kunna vara säkra på resultatets riktighet. I den verkliga praktiken finnes i allmänhet ingen facitbok, i vilken man kan se efter, om räkningen är riktigt utförd, och ingen lärare, som man kan fråga. Barnen måste vänja sig att *pröva* den utförda räkningen. Ett räknefel kan vem som helst begå, men den omdömesgille lämnar ej ifrån sig en felaktigt utförd räkning. Han prövar, tills han vet, att han räknat rätt. Prövning av addition torde bäst ske genom förnyad sammanläggning. Många anse, att man härvid gör klokt att utföra additionen nerifrån upp, om man först räknat uppifrån ner och tvärtom. Detta, emedan ett fel, som begåtts vid första räkningen, lätt göres om vid den andra. Har jag ena gången sagt 37 + 5 är 43, kanske jag andra gången säger detsamma. Man bör ej anse additionen riktigt utförd, förrän man två gånger efter varandra funnit samma resultat. — En annan metod att kontrollera en addition är att använda nioprovet. (Se under multiplikation.)

En subtraktion kan bra kontrolleras genom att resten och den frådragna delen sammanläggas, då ju det hela skall erhållas.

Alltså

$$\begin{array}{r} 428 \\ -\,379 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$379 + 49 = 428$$

Denna prövningsmetod kan användas som metod att utföra en subtraktion och brukar då kallas utfyllningsmetoden. T. ex.

$$\begin{array}{r} 628 \\ -\,212 \\ \hline \end{array}$$

utföres så: 2 och 6 blir 8, varvid 6 nedskrives: 1 och 1 blir 2, varvid 1 nedskrives: 2 och 4 blir 6, varvid 4 nedskrives. Ett annat exempel:

$$\begin{array}{r} 723 \\ -\,578 \\ \hline 145 \end{array}$$

8 och 5 blir 13, varvid 5 nedskrives. Nu ha vi 1 i minne och räkna så vidare: 1 och 7 är 8, 8 och 4 är 12, varvid 4 nedskrives. Så ha vi åter

1 i minne och räkna 1 och 5 är 6, 6 och 1 är 7, och 1 nedskrives. Kontrollen kan även här lämpligen ske genom förnyad sammanläggning av 578 och 145.

Denna metod är visserligen god och går något fortare att utföra än den förut genomgångna, vanligare metoden, men är ej fullt så naturlig som denna. Då subtraktion ej är något räknesätt, där det i praktiken är viktigt att använda snabbräkningsmetoder, torde därför den vanliga metoden vara att föredraga. Ytterligare en annan metod kan förtjäna omnämnas genom ett exempel.

$$\begin{array}{r} 65 \\ -\,38 \\ \hline 27 \end{array}$$

kan räknas så: 8 från 15 blir 7 kvar, 4 från 6 blir 2 kvar. Teoretiskt är den ju enkel nog. Man har lagt 10 såväl till det hela som till delen, som skall dragas från, och därmed ändras ju ej resten. Även denna metod synes oss dock mera konstlad än den vanliga.

Multiplikationstekniken i hela tal.

§ 21. **Multiplikationstabellen.**

Vi hava förut diskuterat innebörden i räknesättet multiplikation och skola nu gå igenom, hur barnen kunna lära sig multiplikationstekniken. Grundvalen är ju säker kunskap i *multiplikationstabellen*. Studiet av denna bör påbörjas å småskolestadiet, och den bör vara säkert inlärd vid tredje skolårets slut.

Man bör akta sig för att för tidigt driva inlärandet som ett rent minnesarbete. Det bör i stor utsträckning vara ett tankearbete, och barnen skola vänjas att på egen hand taga reda på produkten, när de ej minnas den. De kunna ju alltid genom addition av alla termerna finna resultatet, och det är nyttigt att allt emellanåt låta dem göra så, då multiplikationens samband med additionen därigenom inskärpes. I allmänhet behöva de väl ej gå så till elementerna utan kunna härleda den sökta produkten ur någon annan produkt i tabellen, t. ex. $9 \cdot 8$ ur $10 \cdot 8$, $8 \cdot 5$ ur $4 \cdot 5$ med beaktande av att $8 \cdot 5$ bör vara dubbelt så mycket som $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$ ur $10 \cdot 6$, nämligen dess hälft, etc. Hela tabellen blir en vävnad av dylika samband, som underlätta ihågkommandet och begripandet. Läraren bör ofta ställa små problem av hithörande slag, t. ex. hur mycket är $7 \cdot 9$ större än $7 \cdot 8$, eller än $6 \cdot 9$. Hur många gånger är $8 \cdot 7$ så stort som $4 \cdot 7$, eller $9 \cdot 3$ så stort som $3 \cdot 3$, etc.

Emellertid måste man se till, att kunnandet *till slut blir rent mekaniskt*. Hur mycket $9 \cdot 8$ är, skall till slut *vetas utan någon härledning* ur $10 \cdot 8$ eller på annat sätt. Läraren bör alltså se till, att barnen så småningom utan att fundera svara på hithörande frågor. En del barn ha nämligen stark benägenhet att hålla fast vid härledningsmetoden och behöva tvingas att släppa den och helt lita på sitt minne. Det kräves alltså ett rent memoreringsarbete, vilket ofta må taga formen av *memoreringsexercis*. Särskilt de svåra produkterna inpluggas. Sedan barnen nått en viss färdighet i tabellen, få de direkta läxor i den. De böra även få i uppgift att själva skriva tabellerna. Ju flera sinnen som övas dess bättre.

Man bör ock sträva efter att göra inövningsarbetet av tabellen så varierande och trevligt som möjligt.

Ett utmärkt medel härtill är användningen av den s. k. pytagoreiska tabellen, d. v. s. en uppställning av tabellen i nedanstående geometriska form.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Barnen böra själva rita den i sina böcker. För övrigt kan arbetet med den göras mycket varierande. Barnen kunna t. ex. på en bit papp få rita upp tvenne kvadratiska rutnät, innehållande vardera 100 rutor, det ena något mindre än det andra, och av det mindre rutnätet göra en »pytagoreisk tabell» genom att avskriva tabellens hundra tal i rutorna. Sen klippas alla de hundra rutorna ut, och uppgiften blir att placera de hopblandade lapparna å det andra rutnätet, var lapp på sin rätta plats, så att det bildas en pytagoreisk tabell. Det kan bliva en tävlan mellan barnen, om vem som lyckas göra det fortast, och de kunna ta reda på, hur lång tid de behöva för att placera ut alla lapparna och sträva att göra det på allt kortare tid. Det hela kan bliva till en rolig lek, som barnen även hemma gärna vilja syssla med. Denna sysselsättning förutsätter, att barnen redan förut i det närmaste äro säkra i tabellen och lämpar sig därför väl närmast för tredje årskursen.

§ 22. Lärogången och metoden för det vidare inlärandet av multiplikationstekniken.

a) Multiplikation med ett ensiffrigt tal som multiplikator.

Metoden härledes lätt som en förbättring av additionstekniken. T. ex. 7 · 28 uppställes först som addition och adderas på vanligt sätt.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ 28 \\ 28 \\ 28 \\ 28 \\ 28 \\ \hline 196 \end{array}$$

Men om barnen ha förvärvat kunskap om multiplikationstabellen, är det säkerligen många av dem, som självmant föreslå förenklingen att taga 7 · 8 för att få veta summan av entalsraden och 7 · 2 för att få veta summan av tiotalsraden. Så talar läraren om, att vid uträkningen ofta användes uppställningen

$$\begin{array}{r} 28 \\ \cdot\ 7 \\ \hline 196 \end{array}$$ och så är saken klar.

Vid ren huvudräkning torde vara lämpligast att räkna så: 7 · 20 = 140, 7 · 8 = 56, 140 + 56 = 196. Men vid skriftlig räkning, vare sig talen äro skrivna efter eller under varandra, blir det bekvämast att räkna 7 · 8 = 56 (*6* skrives upp och 5 till minnes), 7 · 2 = 14, 5 till blir 19.

Förfaringssättet blir fullkomligt detsamma, även om multiplikanden är ett flersiffrigt tal.

b) Multiplikation med talet 10.

Då barnen vid arbetet med multiplikationstabellen lärt multiplicera med 10, klara de lätt uppgifter som 10 · 57. 10 · 7 är ju 70 (eller 7 tiotal) och 10 · 5 tiotal blir 50 tiotal, alltså tillsammans med de förra 7 57 tiotal eller 5 hundratal, 7 tiotal, 0 ental. Regeln att ett helt tal blir multiplicerat med 10 genom att en nolla tillägges, *upptäckes*, *förklaras* och *inövas*.

c) Multiplikation med talen 11—19.

När barnen kunna utföra multiplikationen med 10 fullkomligt säkert, kan arbetet med ovanstående multiplikationer vidtaga.

Ställas barnen inför en huvudräkningsuppgift som 12 · 34 (talen uppskrivna å tavlan), torde flertalet kunna lösa den. En del föredra förmodligen tillvägagångssättet 12 · 4 och 12 · 3 tiotal och lyckas kanske också räkna talet så. Men har uppgiften 10 · 34 givits omedelbart förut, föreslås säkerligen också, att man skall taga 34 dels 10 gånger och dels 2 gånger. Talet uträknas så, och tankegången markeras för alla genom uppskrivning på raden av de olika uträkningarna, alltså $12 \cdot 34 = 10 \cdot 34 + 2 \cdot 34 = 340 + 68 = 408$. Då multiplikation med 10 är så lätt att utföra och minnas, vilket är av betydelse, då det gäller ren huvudräkning, få barnen lära sig att vid de följande övningarna använda denna metod.[1] Så övas sådana tal dels som ren huvudräkning, dels med uppskrivning å raden. Efter någon tid antyder läraren, att det kunde vara väl så bra att skriva delprodukterna *under* varandra för att underlätta sammanläggningen, och därmed är alltså den vanliga tekniken klar. T. ex. $17 \cdot 23$ uppskrives först å raden $10 \cdot 23 + 7 \cdot 23 = 230 + 161 = 391$, och skrives sedan så:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \cdot\, 17 \\ 161 \\ +\, 230 \\ \hline 391 \end{array}$$

Saken är för barnen enkel och klar. Självklart är, att nollan i 230 utsättes. En sådan teknisk förenkling som nollans slopande genomföres på ett senare stadium. Barnen uträkna alltså talet genom att först taga 7 gånger 23 och sedan 10 gånger 23. Bättre vore kanske att först taga 10 gånger 23 och sedan 7 gånger 23 och skriva så:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \cdot\, 17 \\ 230 \\ +\, 161 \\ \hline \end{array},$$

då detta räkne- och skrivsätt fullständigt ansluter sig till huvudräkningen och räkningen på raden. Det kan vidare vara av viss betydelse att börja med den största delprodukten, så att man genast får en ungefärlig uppfattning av hela produktens storlek.

[1] *Anm.* Men även den förut omnämnda metoden skulle kunna konsekvent utbyggas till förklaring av multiplikationstekniken, se härom § 24.

Barnen skola naturligtvis säga 10 gånger 23 och ej taga 23 1 gång och sedan multiplicera med 10, vilket ju måste verka som ren meningslöshet. Först efter inlärande av multiplikation med högre tiotal kan ett sådant uttryckssätt införas.

d) Multiplikation med rena tiotal.

Man kan erhålla 20-falden av ett tal genom att först multiplicera det med 2 och sedan multiplicera den erhållna produkten med 10. Ha barnen arbetat igenom multiplikationstabellen, såsom ovan föreslagits, behöver ej denna sak vara så svår att fatta. De ha då flera gånger gjort alldeles liknande tankeoperationer. De ha insett, att $6 \cdot 5$ är dubbelt så mycket som $3 \cdot 5$, och att $6 \cdot 5$ är 3 gånger så mycket som $2 \cdot 5$. De övas nu ytterligare i denna tankegång och inse snart, att t. ex. $20 \cdot 3$ är 10 ggr så mycket som $2 \cdot 3$. Det är bra att även åskådligt demonstrera denna sanning, t. ex. genom punkter på följande sätt:

På samma sätt inses, att en multiplikation med de övriga rena tiotalen, 30, 40 etc. kan utföras genom efter varandra utförda multiplikationer med 3, 4 etc. och 10.

Till en början kan man låta barnen fullständigt uppskriva tankegången, alltså vid $20 \cdot 34$

$$\begin{cases} 2 \cdot 34 = 68 \\ 10 \cdot 68 = 680 \end{cases}$$

alltså $20 \cdot 34 = 680$. Snart skrives som brukligt

$$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot\, 20 \\ \hline 680 \end{array}$$

Om barnen vid multiplikationen skulle skriva

$$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot\, 20 \\ \hline 680, \end{array}$$

är produkten naturligtvis riktig, men läraren påpekar, att det kan vara ändamålsenligt, att låta entalssiffran i produkten stå under entalssiffran i faktorerna. Vid multiplikationen $2 \cdot 34 = 68$, får man alltså ha i minnet, att en nolla skall tillsättas och skriva siffran 8 i tiotalsraden, alltså

$$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot\,20 \\ \hline 68 \end{array}$$

och sedan tillsätta nollan:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot\,20 \\ \hline 680 \end{array}$$

Under inga omständigheter tillåtas barnen att skriva

$$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot\,20 \\ \hline 00 \\ 68 \\ \hline 680 \end{array}$$

Men har undervisningen lagts rationellt, komma de väl knappast på en sådan idé.

e) Multiplikation med talen 21—99.

Om barnen först få lösa uppgiften $20 \cdot 24$ och omedelbart därpå ställas inför uppgiften $22 \cdot 24$, torde de allmänt lösa den genom räkneoperationerna $20 \cdot 24 + 2 \cdot 24$. Den skriftliga uppställningen blir naturligtvis som förut

$$\begin{array}{r} 24 \\ \cdot\,22 \\ \hline 48 \\ 480 \\ \hline 528 \end{array}$$

f) Multiplikation med rena hundratal, tusental, etc.

Då multiplikation med 100 kan utföras genom tvenne på varandra följande multiplikationer med 10, inses, att den kan utföras genom tilläggning av 2 nollor. Analogt i fråga om multiplikation med 1 000 etc. Och multiplikation med 200 kan ske genom multiplikation med 2 och 100. Ha barnen förstått det analoga förfaringssättet vid multiplikation med 20, förstå de detta nu. Uppskrivningen blir naturligtvis analog med den vid de rena tiotalen, alltså t. ex.

$$\begin{array}{r} 236 \\ \cdot\,300 \\ \hline 70\,800 \end{array}$$

Det skadar ej, om barnen få regeln, att siffran i produkten (här siffran 8) alltid ställes under den siffra, som använts vid multiplikationen (här 3 i 300).

g) Multiplikation med tre- eller flersiffriga tal.

Behandlas analogt med det föregående. Den skriftliga uppställningen blir ju t. ex.:

$$\begin{array}{r} 234 \\ \cdot\ 327 \\ \hline 1\,638 \\ 4\,680 \\ 70\,200 \\ \hline 76\,518 \end{array}$$

eller, om man vill börja med den största delprodukten,

$$\begin{array}{r} 234 \\ \cdot\ 327 \\ \hline 70\,200 \\ 4\,680 \\ 1\,638 \\ \hline 76\,518 \end{array}$$

§ 23. **Vissa förenklingar av tekniken.**

En del smärre tekniska förenklingar böra inläras vid lämpligt tillfälle. Vi ha tänkt oss, att barnen rätt länge skola vid multiplikation med tiotalen, hundratalen etc. sätta ut nollorna, vilka ju bruka utelämnas. Vid något tillfälle påpekar läraren, att när siffran sättes i rätt talsorts-kolumn, är det strängt taget onödigt att sätta ut nollorna. En bra regel att följa i och för siffrornas placering i rätta rader är den omnämnda, att första siffran, som nedskrives i delprodukten, alltid skall ställas under den siffra, som använts vid multiplikationen.

En annan förenkling hänför sig till det fall, då faktorerna sluta på nollor. Till en början göres ingen särbehandling för det fallet. Alltså: $30 \cdot 250$ skrives

$$\begin{array}{r} 250 \\ \cdot\,30 \\ \hline 7\,500, \end{array}$$

och räknas så: 3 gånger 0 är 0, och nollan *skrives under trean* etc., och så multipliceras med 10 genom tillsättning av en nolla.

140 · 3 700 kan mycket väl räknas så:

$$\begin{array}{r} 3\,700 \\ \cdot\,140 \\ \hline 148\,000 \\ 370\,000 \\ \hline 518\,000 \end{array}$$

4 gånger 0 är 0, vilken nolla skrives under fyran, etc. Då många nollor förekomma, blir det emellertid obekvämt, och det är lämpligt lära barnen behandla sådana tal så, som följande exempel visar:

$$\begin{array}{l} \;134000 \\ \;\;\;270000 \\ \hline \;\;938 \\ 268 \\ \hline 36180000000 \end{array}$$

Alltså: 134 multipliceras med 27; och sammanlagda antalet nollor i faktorerna sättas efter den produkt, som erhållits.

En annan förenkling, som barnen snart få lov att använda, är *omkastning av faktorerna*, när så lämpar sig. De inse snart, att $a \cdot b = b \cdot a$, och när räknearbetet kan förenklas genom en sådan omkastning, bör denna ej förbjudas. Vid t. ex. 23245 · 32 är det onekligen åtskilligt bekvämare med uppställningen:

$$\begin{array}{r} 23\,245 \\ \cdot\,32 \\ \hline 46\,490 \\ 697\,350 \\ \hline 743\,840 \end{array}$$

än:

$$\begin{array}{r} 32 \\ 23\,245 \\ \hline 160 \\ 1\,280 \\ 6\,400 \\ 96\,000 \\ 640\,000 \\ \hline 743\,840, \end{array}$$

och barnen böra räkna på det lättaste sättet, men de skola dock *kunna* räkna ut talet på det andra sättet, om så fordras.

4

Och icke alltid är det enklast att taga det mindre talet till multiplikator. Vid t. ex. 10 005 · 874 är det bekvämare att räkna så:

$$\begin{array}{r} 874 \\ \underline{10\,005} \\ 4\,370 \\ \underline{8\,740\,000} \\ 8\,744\,370 \end{array}$$

än så:

$$\begin{array}{r} 10\,005 \\ \underline{874} \\ 40\,020 \\ 700\,350 \\ \underline{8\,004\,000} \\ 8\,744\,370 \end{array}$$

§ 24. Följande metod skulle i stället för den nu genomgångna möjligen kunna komma i fråga till förklaring av multiplikationstekniken.

Vid tal med ensiffrig multiplikator, t. ex. 8 · 23, tänkte vi oss, att barnen fingo lära sig uppfatta multiplikationen som en förenkling av additionstekniken, så att entalsraden summerades genom multiplikationen 8 · 3 och tiotalsraden genom 8 · 2. Det är möjligt att konsekvent utbygga denna metod att omfatta alla multiplikationer. Vid t. ex. 46 · 34 kan resoneras så, att vi skola summera 46 stycken av talet 4 i entalsraden, vilket blir 46 · 4 = 184 ental, och 46 stycken av talet 3 i tiotalsraden, alltså 46 · 3 tiotal = 138 tiotal. Vid uträkningen av 46 · 4 och 46 · 3 *omkastas faktorerna*, så att man i stället uträknar 4 · 46 och 3 · 46 på sedvanligt sätt. Barnen skola alltså ha klart för sig, att en sådan omkastning ej ändrar resultatet. Uppställningen och uträkningen kan vara:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot\,\mathbf{46} \\ \mathbf{184} \\ \mathbf{138} \\ 1\,564 \end{array}$$

Sättes multiplikatorn — emot sedvanan — över multiplikanden, skulle tekniken bliva identisk med den vanliga, alltså:

$$\begin{array}{r} 46 \\ \cdot\,\mathbf{34} \\ \mathbf{184} \\ 138 \\ 1\,564 \end{array}$$

Om barnen ha förstått idén böra de utan svårighet kunna utföra multiplikationer med större faktorer, ty tillvägagångssättet blir alldeles detsamma vid alla multiplikationer. Vi utföra ett exempel.

473 · 628

Det gäller, att summera 473 stycken åttor (473 · 8) i entalsraden, 473 stycken tvåor (473 · 2) i tiotalsraden och 473 stycken sexor (473 · 6) i hundratalsraden. Uppställningen kan bliva:

$$\begin{array}{r} 628 \\ \cdot\, 473 \\ \hline 3784 \\ 946 \\ 2838 \\ \hline 297044 \end{array}$$

Man multiplicerar alltså 473 först med 8, sedan med 2 och så med 6.

Väljes uppställningen

$$\begin{array}{r} 473 \\ \cdot\, 628 \end{array}$$

blir ju tekniken identisk med den vanliga, fast den tankegång, som ligger bakom, ej är densamma.

§ 25. Prövningsmetoder i multiplikation. Nioprovet.

Vikten av att en uträknings riktighet prövas behöver inskärpas hos barnen, och sådan prövning skall flitigt övas. Den enklaste prövningen är naturligtvis att helt enkelt göra om multiplikationen, i det uträkningen granskas siffra för siffra. En sådan granskning och omräkning är mycket fort utförd och bör aldrig underlåtas, förutom i det fall att någon annan omständligare prövningsmetod användes.

En tillförlitligare, men också omständligare, prövningsmetod är att helt göra om multiplikationen med faktorerna omkastade. Ett annat sätt är att pröva en multiplikation genom motsvarande division, alltså genom division av produkten med en faktor, då den andra faktorn bör fås till kvot.

Ett behändigare, om ock ej fullt tillförlitligt, prov är det s. k. *nioprovet*, som för läraren är av värde, då han snabbt vill undersöka om en multiplikation — t. ex. i barnens räknehäften — är riktigt utförd.

Man tager reda på tvärsumman till vardera faktorn och till produkten. Skulle en tvärsumma bli ett två- eller flersiffrigt tal, tages åter tvärsumman, tills man får ett ensiffrigt tal. Blir detta 9, tages 0 i stället. Faktorernas tvärsummor multipliceras, och det så erhållna talet, eller, om det är mer än ensiffrigt, dess tvärsumma, skall vara lika med produktens »ensiffriga tvärsumma», om multiplikationen är riktigt utförd. Att märka är, att talet 9 alltid utbytes mot 0. Av följande exempel framgår förfaringssättet:

$$
\begin{array}{r}
327\ (12) \rightarrow 3 \\
683\ (17) \rightarrow 8 \\
\hline
981 \\
2616 \\
1962 \\
\hline
223341
\end{array}
\qquad 24 \rightarrow 6
$$

$$223341 \rightarrow 15 \rightarrow 6$$

Man tager tvärsumman av 327, den blir 12, av 12 tages åter tvärsumman, som blir 3. På samma sätt göres med 683, dess tvärsumma blir 8. De erhållna talen, 3 och 8, multipliceras, och av 24 tages åter tvärsumman, alltså *6*. Så tages tvärsumman av produkten. Den blir 15, och tvärsumman av 15 blir *6*, samma tal alltså, som erhölls vid behandlingen av faktorerna, vilket alltid inträffar, om talet är rätt räknat.

Vill man lära barnen att använda detta prov, torde det kunna ske, utan att man behöver närmare förklara dess innebörd.

Men läraren bör naturligtvis förstå det. Följande förklaring är enkel nog och skulle kunna meddelas barn, som vore särskilt intresserade av att få veta, hur det hänger ihop med detta prov.

Ett tals tvärsumma är en niorest till talet. Med ett tals niorest menar man en rest, som erhålles, då 9 eller en multipel av 9 fråndrages talet. Om från 28 drages 9, återstår 19, vilket tal alltså är en niorest (»den första») till 28. Drages 2 · 9 ifrån, återstår 10 (»den andra nioresten») och drages slutligen 3 · 9 ifrån, återstår 1 (den sista nioresten, som vanligen avses, då man talar om nioresten).

Nu giva ju alla grundtalen, 10, 100, 1 000, 10,000 etc., 1 till sista niorest. Alltså giva 2, 20, 200 etc. 2 till sista niorest, 3, 30, 300 etc. 3 till sista niorest. På samma sätt alla de andra rena tiotalen, hundratalen, tusentalen etc. I 9, 90, 900 etc. går 9 ju jämnt upp. Näst sista niorest är alltså 9 och sista är 0. Ett tals tvärsumma måste alltså vara en niorest. T. ex. 8 472 består av 8 000+400+70+2. 8 000 dividerat med 9 ger till sista niorest 8, 400 ger 4, 70 ger 7 och 2 ger 2. Summan av alla dessa tal — $8+4+7+2 = 21$ — måste alltså vara en niorest. Det är tydligen inte den sista, vilken erhålles om tvärsumman av 21 tages, alltså 3. — När det gäller att taga reda på sista nioresten, kunna alltså alla nior eller tal, som tillsammans bli nio, utelämnas (eller behandlas, som om de vore nollor). I talet 8 472 kunde 7+2 utelämnas; tvärsumman hade då blivit $8+4 = 12$, vilket alltså är en niorest. Ur 12 erhålles så den sista nioresten, som blir 3. Genom aktgivande härpå kan den sista nioresten ofta mycket snabbt bestämmas.

Förklaringen av nioprovet vid multiplikation blir nu lätt. Vid t. ex. $326 \cdot 4\,982 = 1\,624\,132$ tänka vi oss 326 stycken tal av storleken 4 982 adderade, alltså:

4 982+4 892+ etc. - [illegible] (326 gånger)

Sista nioresten av 4 982 är 5, och $326 \cdot 5$ är således en niorest till produkten $326 \cdot 4\,982$. Det gäller nu att bestämma sista nioresten till $326 \cdot 5$, eller — vilket ju blir detsamma — till $5 \cdot 326$. Sista nioresten till 326 är 2; 5 gånger 2 är 10, vilket således är en niorest, och den sista nioresten blir alltså 1. Den produkt, 1 624 132, som erhölls vid multiplikationen, skall alltså också giva 1 till sista niorest, om multiplikationen är rätt utförd.

Att provet ej är absolut tillförlitligt, inses lätt. Därför att produktens niorest är så stor, som den bör vara, behöver ju produkten ej vara den rätta, ty två tal kunna ju mycket väl ha samma niorest utan att vara identiska, t. ex. 3 465 och 4 365 eller 7 264 och 6 364, eller 7 964 och 7 064, men sannolikheten för att räkningen är riktigt utförd är dock rätt stor, om provet stämmer.

Nioprovet kan tydligen användas även vid de andra räknesätten. Vid *division* prövas, om sista nioresten till (kvot · divisor + rest) blir densamma som till dividenden. Ex.:

46782 : 327 = 143 rest 21
327
1408
1308
 1002
  981
   21

Sista nioresten för 327 är 3, för 143 är den 8 och för resten 21 är den 3, alltså är $3 \cdot 8 + 3 = 27$ en niorest, och då $2 + 7 = 9$, blir den sista nioresten, alltså 0. Sista nioresten för 46 782 är också 0; divisionen således troligen rätt räknad.

En addition kan prövas genom att termernas niorester adderas; det så erhållna talets niorest skall överensstämma med summans, alltså t. ex.:

4 782	sista	niorest	3
3 924	»		0
572	»		5
8 004			3
29			2
3 174	»	»	6
4 986			
25 471 –			19 →

Nioresternas summa är 19 och sista nioresten 1. Sista nioresten av 25 471 är även 1. Additionen således troligen riktigt utförd.

Vid *subtraktion* kan ju genom nioprovet prövas, om summan av resten och den frångragna delen blir lika med det hela. Ex.:

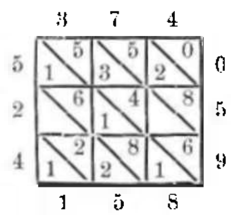
34 697	sista niorest		2
— 8 432	»	»	8
26 265	»	»	3

$8+3=11$, $1+1=2$.

I fråga om addition är nioprovet opraktiskt och vid subtraktion obehövligt. Men vid multiplikation och division kan det vara bra att använda.

§ 26. **Ett par kuriösa multiplikationsmetoder.**

Enligt en metod, som av en författare kallas den muselmanska, utföres t. ex. $425 \cdot 374$ på följande sätt:



$\therefore$ $425 \cdot 374 = 158\,950.$

Metoden är teoretiskt intressant, då genom densamma ett vanligt fel vid uträkning enligt vår metod undvikes. I ovanstående tal räkna vi så: $5 \cdot 4$ är 20, två till minnes, $5 \cdot 7$ är 35, 2 till blir 37 etc. Detta »minnesräknande» undvikes i denna metod, då såväl 20 som 35 direkt nedskrivas. Men har man ej rutat papper till hands, blir den för besvärlig för att på allvar kunna tänkas som konkurrent till den vanliga metoden.

En annan kuriös metod framgår av följande exempel: $29 \cdot 31 = ?$ Man bildar en ny produkt med halva multiplikatorn och dubbla multiplikanden som nya faktorer. Uppkomma bråktal vid delningen, bortkastas de. Man fortsätter att bilda nya produkter, tills man kommer fram till en produkt med 1 som multiplikator:

$$\begin{array}{rcr} 29 & \cdot & 31 \\ 14 & \cdot & 62 \\ 7 & \cdot & 124 \\ 3 & \cdot & 248 \\ 1 & \cdot & 496 \\ & & \overline{899} \end{array}$$

Så strykas alla produkter med *jämn* multiplikator (i ovanstående exempel alltså $14 \cdot 62$), varpå de återstående multiplikanderna adderas. Summan är den sökta produkten.

Metoden torde förstås utan större svårighet. Den kan ju vara bra för den, som har svårt att lära sig multiplikationstabellen, då den endast kräver multiplikation och division med 2! Den blir naturligtvis orimligt omständlig, när faktorerna äro stora tal.

Divisionstekniken i hela tal.

§ 27. **Divisioner inom multiplikationstabellens område.**

Efter behandling av talområdet 1—20 påbörjas under andra skolåret divisionsräknesätten. Barnen skola naturligtvis lära sig innebörden i operationerna genom att verkligen utföra delningarna. Deras stenar, stickor, kastanjer etc. få beteckna de olika föremål, som skola delas. Sedan låter man barnen försöka lösa hithörande uppgifter utan hjälp av verkligt utförda delningar, vilket de ju böra kunna genom att använda sin kunskap i multiplikationstabellen.

Det är klokt att rätt länge hålla på med den ena sortens division. Vi föreslå, att man börjar med innehållsdivision, så att barnen blivit förtrogna med den, innan man övergår till den andra divisionsarten. Barnen bli lätt förvirrade, om uppgifter av båda slagen från början följa om varandra, på grund av den åtföljande omkastningen vid användande av multiplikationstabellen. Innehållsdivisionen 16 öre : 2 öre skola de räkna ut genom att pröva sig fram med tvåan som *multiplikand*, varvid de finna, att 8 · 2 öre = 16 öre; svaret således 8 gånger; men delningsdivisionen hälften av 16 öre skola de räkna ut genom att pröva sig fram med tvåan som *multiplikator*, varvid de finna, att 2 · 8 öre = 16 öre, svaret således 8 öre.

Sedan divisionsbeteckningen införts, kan det ibland vara lämpligt att bredvid teckna »beviset» för divisionens riktiga utförande i form av den motsvarande multiplikationen. T. ex.:

16 öre : 2 öre = 8 gånger, ty 8 · 2 öre = 16 öre.
$\frac{1}{2}$ av 16 öre = 8 öre, ty 2 · 8 öre = 16 öre.

Vid denna teckning av motsvarande multiplikation bör man noggrant se till, att faktorernas ordningsföljd blir den rätta.

Med »divisionstabellernas» inlärande drives så småningom en viss exercis, så att barnen i klass 3 till slut lika snabbt kunna säga, hur många gånger 7 cm. innehålles i 56 cm., som de kunna angiva, vad 8 gånger 7 cm blir.

Naturligtvis givas också inom detta område divisionsuppgifter, i vilka divisionen ej går jämnt upp, t. ex. $\frac{1}{7}$ av 60 ark = 8 ark (rest 4 ark).

§ 28. **Division med ensiffrig divisor.**

Det torde vara lämpligt, att så småningom låta divisionstekniken bli densamma för båda divisionsarterna, och vi föreslå en teknik, som närmast ansluter sig till den för innehållsdivision naturliga. Men under hela 3:e årskursen är det bra att i och för klarställandet av de båda divisionernas olika innebörd låta barnen vid räkningens utförande använda det för varje delningsart mest lämpade resonemanget. Vid utförande av delningsdivision med ensiffrig divisor i klass 3 resoneras alltså på det för denna delningsart naturligaste sättet, som vi nu behandla.

a) Delningsdivision.

Vid den skriftliga behandlingen delas varje talsort för sig, med början på högsta talsorten, och ev. rester förvandlas till närmast lägre talsort. Ex.: 48 öre skall delas lika mellan 2 barn. Hur mycket få de vardera?

$\frac{1}{2}$ av 48 öre = 24 öre.

De 48 örena låta vi utgöras av 4 tioöringar och 8 ettöringar och utföra delningen i verkligheten. Det blir ju 2 tioöringar och 4 ettöringar, alltså 24 öre, för vart barn. Om i stället 38 öre skall delas mellan 2 barn, förfares på samma sätt. Men av 3 tioöringar kan det endast bli en tioöring åt vart barn, och den återstående tioöringen får växlas till ettöringar; med de ursprungliga 8 blir det alltså 18 ettöringar, vilka så lika delas. Alltså kommer 1 tioöring och 9 ettöringar = 19 öre på varje barns lott. Dessa operationer utföras först i verkligheten och sedan i tanken. Uppskrivningen kan vara:

$\frac{1}{2}$ av 38 öre = 19 öre.

På samma sätt vid obenämnda tal, fast resonemanget får gälla hundratal, tiotal och ental i stället för enkronor, tioöringar och ettöringar.

En olägenhet med den angivna beteckningen är, att det vid kvotsiffrornas nedskrivande ej framgår, vilken talsort de beteckna. Divisionsfel ha ofta sin grund däri. Många lärare låta därför barnen placera kvotsiffrorna över dividenden, så att deras talsort genast framträder. Efter uträkningen skrives resultatet efter likhetstecknet. Alltså t. ex.:

```
        769
1/7 av 5384 = 769
     — 49       (rest 1).
        48
      — 42
        64
      — 63
         1
```

Resonemanget: $\frac{1}{7}$ av 53 hundratal blir 7 hundratal (sjuan skrives över trean i dividenden). 7 · 7 hundratal är 49 hundratal, och 49 hundratal från 53 hundratal blir 4 hundratal. Dessa 4 hundratal förvandlas till tiotal. Inalles har man då 48 tiotal. $\frac{1}{7}$ av 48 tiotal blir 6 tiotal (sexan skrives över åttan i dividenden) etc. Denna beteckningsmetod underlättar också uträknandet av dessa tal utan uppskrivande av deldividenderna, vilket barnen så småningom böra få lära sig att göra.

Att använda en särskild beteckning, såsom 5 384|7, när talet »skrives upp till uträkning» synes vara överflödigt.

h) *Innehållsdivision med ensiffrig divisor.*

Närmast efter de inom multiplikationstabellens område hörande innehållsdivisionerna bör ej vid undervisningen komma övriga innehållsdivisioner med ensiffrig divisor utan lättare divisioner med *ensiffrig kvot.* Först i samband med inlärandet av multiplikation med flersiffrig multiplikator bör innehållsdivision med ensiffrig divisor fullständigt behandlas.

Tillvägagångssättet vid dennas utförande ligger ej så på hand som vid delningsdivisionen. Barnen kunna gärna under någon tid få arbeta sig fram på mer eller mindre primitiva vägar, innan läraren demonstrerar för dem den vanliga metoden.

Det är naturligt, att de söka reda sig så långt som möjligt med multiplikationstabellen. Gäller det t. ex. att finna, hur många gånger 4 m. innehålles i 52 m., så kunna barnen ju genast bestämma, att det blir mer än 10 gånger. De kunna så draga ifrån 10 · 4 m. = 40 m., varefter återstår 12 m.; och 4 m. i 12 m. går 3 gånger. Svaret blir alltså 13 gånger. Uppställningen kunde bli denna:

$$\begin{array}{r l}
52 & \text{m.} : 4 \text{ m.} = 10 + 3 \\
-40 & \\
\hline
12 & \\
12 & \\
\hline
\end{array}$$

Även mycket primitiva metoder må gärna till en början användas, såsom

$$\begin{array}{r l}
126 & \text{öre} : 6 \text{ öre} = 10 + 10 + 1 = 21 \text{ gånger.} \\
-60 & \\
\hline
66 & \\
-60 & \\
\hline
6 & \\
-6 & \\
\hline
\end{array}$$

Här är det lätt för läraren att påpeka, att vi genast borde kunnat se, att det gick 20 gånger, och så förenklat räkningen för oss. — Man ser av detta exempel, att det är bra, om barnen äro förtrogna med multiplikation med flersiffrig multiplikator, innan detta arbete med inlärande av tekniken för innehållsdivision med ensiffrig divisor tager vid. — Så bli barnen så småningom mogna för inhämtandet av lärarens anvisning, hur man lätt skall kunna få tag på kvotsiffrorna, den ena efter den andra, med början på den, som betecknar den högsta talsorten. T. ex. vid 1 269 öre: 3 öre = 400 + 20 + 3. Läraren påpekar, att någon tusentalssiffra ej kan finnas i det sökta delantalet, då 3 öre ju ej innehålles så mycket som 1 000 gånger i 1 269 öre. Frågan blir så, vilken hundratalssiffran kan vara. Hur många *hundra* gånger 3 öre innehålles i 12 hundra öre, och alltså också i 1 269 öre, kan man finna genom att tänka efter, hur många gånger 3 innehålles i 12. 1 200 kan ju utbytas mot 100 · 12, och när 3 innehålles 4 gånger i 12, innehålles det alltså 100 · 4 = 4 hundra gånger i 1 200. Så återstår 69 öre. Tiotalssiffran kan finnas genom att taga 3 i 6, ty när 3 öre innehålles 2 gånger i 6 öre, så innehålles det 10 gånger så många gånger i 10 · 6 öre, alltså 20 gånger. Nu återstår endast 9 öre, som innehåller 3 öre 3 gånger.

På samma sätt, om förvandling mellan talsorter behöves, t. ex.:

$$\begin{array}{r l}
552 & \text{öre} : 8 \text{ öre} = 60 + 9 \\
-480 & \\
\hline
72 & \\
-72 & \\
\hline
\end{array}$$

55 tiotal kan utbytas mot 10 · 55, och då 8 kan tagas 6

gånger ur 55, kan det alltså säkert tagas $10 \cdot 6 = 60$ gånger ur $10 \cdot 55$. Det gäller ju här endast att finna tiotalens antal (tiotalssiffran), det räcker alltså med att konstatera, att 8 öre går minst 60 men ej så mycket som 70 gånger upp i 552 öre. Frândrages så $60 \cdot 8$ öre $= 480$ öre, återstår 72 öre, och i dessa innehålles 8 öre 9 gånger. Efter någon tid resoneras och skrives helt enkelt så:

```
  69
  552 öre : 8 öre = 69
— 48
   72
 — 72
```

8 i 55 går 6 gånger (varpå sexan skrives över femman, alltså över tiotalsraden i dividenden), 6 ggr 8 är 48, etc., 8 i 72 går 9 gånger.

§ 29. **Division med flersiffrig divisor.**

Under fjärde skolåret skola barnen lära sig fullkomligt förstå, varför delnings- och innehållsdivision alltid leda till samma resultat. Detta kan visas enkelt nog i samband med en verkligt utförd delning, t. ex. $\frac{1}{8}$ av 24 kuber, som verkställes så, att man tar 3 kuber ur den givna mängden 8 gånger och för varje gång fördelar de 3 kuberna med 1 kub i var hög. För var gång, som 3 kuber tas ur det hela, blir det en kub i var och en av de tre högarna. Det måste alltså bli så många kuber i varje hög som det antal gånger, 3 kuber innehållas i 24 kuber. Det inses lätt, att samma gäller, vilka tal som än divideras, ty delningen kan ju alltid utföras på detta sättet. Divisionstekniken må alltså gestalta sig likadan i båda fallen. Ett gemensamt namn — division — för båda räknesätten blir nu också motiverat och inläres. Och även vid delningsdivision användes operationstecknet :, som förut endast använts vid innehållsdivision. Men samtidigt får man se till, att skillnaden mellan räknesätten ej utsuddas. Vid angivande av räknesättet må endast undantagsvis svaret division godtagas, utan barnen skola som förut uttrycka sig fullt tydligt. Även vid beteckningen skall skillnaden fortfarande framträda genom sorternas utsättande, alltså vid innehållsdivision, t. ex. 24 k. : 3 k. = 8 gånger; vid delningsdivision 24 k. : 3 = 8 k.

Vid divisionstekniken synes oss det uttryckssätt, som användes vid innehållsdivision, vara det enklaste, varför vi — som förut sagts — föreslå att det i allmänhet lägges till grund vid förklaringen av tekniken.

a) *Division med talet 10.*

Ex. 230 : 10 = 23, ty 230 är ju 23 tiotal och 10 1 tiotal; alltså 23 tiotal: 1 tiotal, vilket måste vara 23.

Exempel med rest: 2 765 : 10 måste vara 276 och resten 5, ty 276 tiotal: 1 tiotal = 276, och de 5 entalen ändra ju intet i detta.

b) *Division med talen 11—19.*

Då det vid en del av dessa divisioner är svårt att finna rätt kvotsiffra, kan det till en början vara lämpligt låta barnen skriva upp divisorsmultiplerna t. o. m. den tionde. T. ex. vid division med 12.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

Som exempel på förklaringen taga vi uppgiften:

$$\begin{array}{r l}
986 & \\
11832 & : 12 = 986 \\
-\,108 & \\
\hline
103 & \\
-\;\;96 & \\
\hline
72 & \\
\end{array}$$

Några tiotusental eller tusental kan ej den sökta faktorn innehålla, då det hela ju endast har 11 tusental. Frågan blir då, hur många hundratal det blir. 12 i 118 hundratal blir, som förut insetts, lika många hundratal som det antal gånger, 12 innehålles i 118. Och för att finna det, användes den uppskrivna talserien. Av denna synes, att det blir 9, ty 9 · 12 är 108 och 10 · 12 är 120. Alltså skrives 9 över hundratalsraden i dividenden. 9 · 12 är 108, och 108 hundratal skall alltså dragas ifrån det hela, för att vi skola finna, vad som återstår att dela. 10 hundratal är 100 tiotal och hela antalet tiotal alltså 103. 12 i 103 tiotal blir lika många tiotal, som 12 innehålles i 103, alltså 8, som skrives över tiotalsraden, och 8 × 12 är 96, vilket antal tiotal skall fråndragas. Slutligen går 12 6 gånger i 72.

Det är troligt, att åtskilliga barn ej fullt komma att begripa förklaringen av divisionstekniken. Läraren måste här vara på sin vakt, så att ej undervisningen för dessa barns skull urartar till ofruktbart traggel med förklaringen. *Man bör alltså ej länge traggla med redogörelser av typen 12 i 118 hundratal blir lika många hundratal som det antal gånger, 12 innehålles i 118* utan snart nog låta barnen bara säga 12 i 118 går 9 gånger (varvid 9 skrives över hundratalsraden), etc.

c) *Division med rena tiotal.*

Själva grundidén i tekniken är nu klar för barnen, men att finna rätta kvotsiffran bereder dem dock ännu svårighet. De vanliga enkla reglerna till hjälp härvid genomgås. Vid division med rena tiotal är det lätt att förklara, hur man enkelt kan finna kvotsiffran. 320 : 40 måste ge samma resultat som 32 : 4, ty 320 : 40 kan skrivas som 32 tiotal : 4 tiotal.

Sammalunda, om divisorn ej går jämnt upp. 310 : 40 är ju 31 tiotal : 4 tiotal och måste ge samma kvotsiffra som 4 i 31.

Regeln blir densamma, om dividenden ej slutar på noll, t. ex. 273 : 40. 40 i 273 måste ge samma kvotsiffra som 4 tiotal i 27 tiotal; ty att entalssiffran härvidlag ingenting betyder, kan ju lätt inses.

Barnen böra ej vid dessa räkningar stryka nollan i dividend och divisor, vilket lätt leder till fel med hänsyn till restens storlek.

310 : 40 blir ju 7 med rest 30, medan 31 : 4 blir 7 med rest 3. Men 31 tiotal : 4 tiotal ger naturligtvis samma rest som 310 : 40. Resten 3 betecknar ju i detta fall tiotal. Stryker man nollan i dividend och divisor, får man vara uppmärksam härpå. Har *en* nolla strukits, anger resten tiotal, har *två* strukits, anger resten hundratal etc.

Sedan barnen nått färdighet i att bestämma kvotsiffran, när dividenden är ett tresiffrigt tal, äro de mogna för tal med större dividend, t. ex.:

```
    693
  34679 : 50 = 693 rest 29
— 300
   467
 — 450
    179
  — 150
     29
```

För bestämmande av hundratalssiffran i kvoten skall 50 tagas i 346, vilket enligt det föregående sker genom att taga 5 i 34, alltså 6, etc. Så skall tiotalssiffran bestämmas genom att taga 50 i 467, vilket sker genom att taga 5 i 46 = 9; och slutligen 5 i 17.

d) *Division med talen 21—99.*

Här få barnen lära sig regeln, att man för att få tag i kvotsiffran lämpligen kan tänka sig divisorn ändrad till närmsta lägre eller möjligen till närmsta (lägre eller högre) rena tiotal. Barnen kunna ju förstå, att en *liten* förändring i divisorn ej kan ändra kvoten så synnerligt mycket, men samtidigt inse de ock, att regeln naturligtvis ej med säkerhet ger rätt kvotsiffra. Minskas divisorn, blir kanske det tal i kvoten, som man efter regeln finner, för stort, ökas divisorn, blir det kanske för litet. Barnen få så vänja sig, att, innan kvotsiffran och deldividenden nerskrivas, genom huvudräkning söka finna ut, om kvotsiffran duger, så att strykningar och omskrivningar undvikas. Är talet i kvoten för stort, försökes naturligtvis med ett mindre (i allmänhet närmsta mindre).

48
3124 : 64 = 48 rest 52
— 256
564
— 512
52

För att finna, hur mycket 64 i 312 blir, tages 6 i 31, alltså 5; men genom huvudräkning 5 · 64 ser man, att produkten blir större är 312. 5 var alltså för mycket. Så tages 4 i stället, etc.

e) *Division med rena hundratal, tusental, etc.*

Allting blir fullkomligt analogt med behandlingen av de rena tiotalen och behöver endast antydas. 5 375 : 100 = 53, rest 75, ty 53 hundratal: 1 hundratal = 53, etc. 1 800 : 200 = 9, ty 18 hundratal: 2 hundratal = 9. Överskjutande tiotal och ental i dividenden ändra naturligtvis ingenting härvidlag. 1 879 : 200 giver samma kvotsiffra som 18 : 2

72
43764 : 600 = 72 rest 564
— 4200
1764
— 1200
564

600 i 4 376 erhålles ur 6 i 43 etc., och 600 i 1 764 ur 6 i 17 etc.

f) *Division med tre- eller flersiffriga tal.*

Regeln blir ju, att man vid sökandet efter kvotsiffran tänker sig divisorn utbytt mot närmsta (lägre) rena hundratal, tusental etc., och så prövar, om den funna kvotsiffran är den rätta, alldeles analogt med det förut vid 2-siffrig divisor genomgångna. T. ex.:

$$
\begin{array}{r}
762 \\
178456 : 234 = 762 \text{ rest } 148 \\
-1638 \phantom{56 : 234 = 762 \text{ rest } 148} \\
\hline
1465 \phantom{6 : 234 = 762 \text{ rest } 148} \\
-1404 \phantom{6 : 234 = 762 \text{ rest } 148} \\
\hline
616 \phantom{: 234 = 762 \text{ rest } 148} \\
-468 \phantom{: 234 = 762 \text{ rest } 148} \\
\hline
148 \phantom{: 234 = 762 \text{ rest } 148}
\end{array}
$$

234 i 1 784 utbytes mot 200 i 1 784, alltså 2 i 17. Genom huvudräkning märkes, att 8 blir för mycket, och att 7 blir lagom, etc.

§ 30. Prövnings- och snabbräkningsmetoder.

Prövning av division sker bäst genom multiplikation av kvot och divisor med tilläggande av resten, varvid ju dividenden skall erhållas. Att även nioprovet kan användas är förut omtalat.

Följande snabbräkningsmetod för divisionens utförande kan förtjäna omnämnas. Deldividenderna utsättas ej och subtraktionen verkställes genom utfyllnadsmetoden. (Se § 20). Ex.:

```
2814
47846 : 17 = 2814 rest 8
138
 024
  076
   08
```

17 i 47 går ju 2 gånger. Så multipliceras 2 med 17 men i stället för att uppskriva deldividenden 34 och sedan draga den från 47, bestämmes resten på följande sätt: 2 gånger 7 är 14, 14 + *3* är 17 (trean uppskrives och 1 hålles i minnet) 2 · 1 är 2 och 1 till minnes blir 3, och 3 + *1* är 4 (ettan uppskrives). Så ha vi erhållit 13 som rest. 8 nedflyttas, och så förfares på samma sätt igen. Förfaringssättet verkar komplicerat på den, som ej är van vid det, men möjliggör onekligen ett ganska snabbt utförande av en division. Men det är alldeles olämpligt i folkskolan, bland annat därför, att fel lätt begås och äro svåra att upptäcka.

Allmänna bråk och decimalbråk.

§ 31. Det är en rätt vanlig erfarenhet, att barnen efter slutad skolgång mycket fort glömma, vad de i skolan lärt av bråkräkning. Orsaken kan ligga i det sätt, på vilket barnen inhämtat kunskapen. I följande avseenden torde missgrepp vid undervisningen ej vara sällsynta. Barnens sysslande med bråkräkningen består ofta för mycket i att tillämpa mer eller mindre väl bevisade regler och för litet i att härleda förfaringssättet ur grundbegreppen. Även om en regel från början är förstådd, glömmes beviset för den dock snart, och regeln tilllämpas sedan rent mekaniskt. Blir antalet sådana regler stort, är det helt naturligt, om barnen snart efter slutad skolgång glömma dem. Redan på grund härav borde en lärare ej falla för frestelsen att med barnen driva exercis i regeltillämpning i bråkläran. En frestelse är det ju, ty metoden är bekväm, och barnen kunna med den lätt nog lära sig att säkert och snabbt räkna det ena »svåra» talet efter det andra, vilket ju onekligen gör sig bra på en examen. Metoden är dock mindervärdig, och detta även av annat skäl, än att den på så vis inhämtade kunskapen så fort glömmes. Tiden kunde nämligen med hänsyn till barnens förståndsutveckling användas på ett bättre sätt, ty den intellektuella träning, barnen få genom regeltillämpningen kan ej skattas så särskilt högt, fast den naturligtvis ej är alldeles värdelös.

Betydligt värdefullare både med hänsyn till det varaktiga kunnandet och tankens övning blir det, om förfaringssättet härledes ur grundbegreppen — d. v. s. genom att barnen få besinna sig på räkneoperationernas och bråkbegreppets innebörd. Och naturligtvis lära sig barnen härigenom att betydligt säkrare använda sin kunskap i bråkräkning till problemlösning, än de göra vid det mera mekaniska regelräknandet. Det bör ock uppmärksammas, att bråkräkningen mycket mindre än heltalsräkningen kräver ett energiskt inövande av en viss teknik. I heltalsläran böra ju barnen till slut kunna rent mekaniskt utföra en multiplikation eller division, men i bråkläran kräves ingen sådan mekanisk skicklighet. Någon komplicerad teknik i fråga om det, som barnen behöva kunna, finnes där ej. Det mekaniska kunnandet kan därför inom bråkläran skjutas än mer i bakgrunden, än som kan ske i heltalsläran. — För mycket inövningsarbete — regeltillämpande —, för litet tankearbete är alltså en anmärkning, som nog ofta med fog kan riktas mot undervisningen inom bråkläran område.

Ett annat missgrepp, nära förbundet med det nu behandlade, är, att undervisningen ofta blir för mycket inriktad på beteckningen medelst siffrorna, för litet på den verklighet, de talstorheter, som siffrorna beteckna. Man kan ibland få det intrycket, att hela bråkräkningen endast är ett system av regler om hur siffrorna förbindas med varandra genom vissa tecken, bråkstreck, plus, minus, multiplikations- och divisionstecken.

En tredje allmän anmärkning är, att barnen överhopas med en mängd detaljer, medan de stora linjerna ej nog markeras. Ofta nog ser varken läraren eller barnen »skogen för bara träd». Dessa missgrepp få vi alltså vid den i det följande föreslagna lärogången och metoden söka undvika.

§ 32. **Lärogången.**

Sedan bråkbegreppet grundlagts i samband med delning av olika föremål, skola barnen lära sig att behandla en bråksort som en ny talsort och lära sig räkna med den, liksom de förut lärt sig räkna med tiotal, hundratal, dussin, tjog, etc.

Arbetet inom denna första huvudavdelning av kursen skall omfatta alla fem räknesätten, men endast sådana uppgifter, i vilka förvandling från en bråksort till annan ej förekommer. Däremot få barnen lära sig förvandla från en bråksort till helt tal och tvärtom. Lämpligt är att först syssla med bråkdelar av enkla enheter (enskilda ting) och sedan taga bråkdelar även av heltalsenheter, såsom dussin, tjog.

I kursens följande avdelningar skola de båda begränsningar, som finnas inom första avdelningen, hävas. Barnen skola alltså lära sig förvandla en bråksort till en annan och lösa uppgifter, i vilka sådana förvandlingar behöva företagas. Härvid inställer sig snart som ett viktigt specialproblem frågan, *till* vilken bråksort en given bråksort lämpligen skall förvandlas. Vidare skola barnen fullständiga sin kunskap i att taga bråkdelar av tal (multiplikation med bråkmultiplikator) jämte omvändningen därav (motsvarande divisioner).

Läran om decimalbråk införes egentligen endast såsom läran om hur vissa bråk kunna betecknas, och övningen i decimalbråk består huvudsakligen i övning att skriva för barnen redan bekanta räkneoperationer med denna nya — och praktiska — beteckning.

Härmed äro kursens huvudlinjer angivna. I de följande metodiska anvisningarna behandlas kursen i överensstämmelse härmed i följande ordning.

I. Bråkbegreppet. Användning av bråktal vid räkningen inom de olika räknesätten men endast uppgifter, i vilka förvandling av bråksort till annan ej behöver företagas. Alltså addition och subtraktion av liknämnda bråk, multiplikation med heltalsmultiplikator, vissa delningsdivisioner med heltalsdivisor (ex.: $\frac{4}{5} : 2$) och innehållsdivisioner med heltalskvot (ex.: $\frac{1}{10} : \frac{1}{20}$). Enkla uppgifter med tagande av bråkdelar av heltal (ex.: $\frac{1}{4}$ av 1 tjog). Inlärande av den vanliga bråkbeteckningen.

II. Övning i att förvandla en bråksort till annan bråksort. Räkneoperationer (huvudsakligen addition och subtraktion) vid vilka förvandling av en bråksort till viss *given* (= den minsta i uppgiften förekommande) bråksort erfordras. (Ex.: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ men däremot ej $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.) Delningsdivision med heltalsdivisor (fullständigt).

III. Inlärande av decimalbråksbeteckning och övning att använda den vid uträkning av uppgifter av förut behandlad typ, alltså addition och subtraktion (fullständigt), multiplikation med heltalsmultiplikator, delningsdivision med heltalsdivisor samt innehållsdivision med heltalskvot. — Förvandling av allmänna bråk till decimalbråk.

IV. Enkla uppgifter, för vilkas lösning kräves bråksorts förvandling till i uppgiften icke förekommande bråksort. — Den vanliga, fullständiga lösningen av problemet att finna den största gemensamma bråksort, till vilken olika bråk kunna förvandlas, meddelas icke här, utan man nöjer sig med mera primitiva metoder.

Vi tänka oss, att bråkräkningen i femte årsklassen lämpligen kan omfatta dessa avdelningar. I klass 6 tages så en repetition av det föregående med fullständigande i fråga om regler för förlängning och förkortning. Därefter kommer:

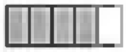
V. Multiplikation med bråkmultiplikator jämte omvändningen, alltså delningsdivision med bråkdivisor och innehållsdivision med bråkkvot (i allmänna bråk och decimalbråk). Och slutligen, om tiden så medgiver:

VI. Fullständigande av tekniken i fråga om addition och subtraktion av bråk (metod för finnande av största gemensamma bråksort).

Vi skola nu något närmare behandla dessa moment.

§ 33. Avdelning I av bråkläran.

a) Bråkuppfattningen (bråk av enkla enheter).

Bråkbegreppet inläres naturligtvis genom delningar av olika ting, äpplen, kakor, pappersark etc., och barnen få lära namnet på bråkdelarna och deras samband med enheten. — Härledningen av ordet bråk kan gärna omtalas, alltså »bråka» = = bryta; i vilken betydelse det ännu användes i »sönderbråkad». — Först klargöras stambråken (de, vilkas täljare är 1) och sedan övriga bråk. Ritning av olika geometriska storheter blir så småningom huvudmedlet vid åskådliggörandet av bråken. Till en början böra ritningarna gärna föreställa vissa ting, och figurens beskaffenhet anpassas därefter, t. ex. en rät linje kan beteckna en stång, en rektangel en chokladkaka eller ett pappersark, en cirkel, ett äpple etc. Men senare väljes den figur, som synes mest tjänlig för åskådliggörande av räkneoperationen, och dess »likhet» med föremålet blir en underordnad sak. För åskådliggörande av mera komplicerade delningar — t. ex. vid delning av ett bråk — är rektangeln utmärkt och bättre än den räta linjen. Det är i allmänhet bättre att företaga delningen, medan barnen se på än visa dem en i förväg delad figur. Men barnen böra ej blott se på lärarens delningar utan skola också själva utföra sådana. Särskilt övas de i att å ritningar markera bråkdelar, t. ex. tre fjärdedels äpple: , fyra femtedels ark  etc.

Sådana uppgifter övas omsorgsfullt, och barnen böra även få hemuppgifter av sådant slag. Även enkla, omvända problem äro nyttiga. Läraren markerar å ritningen en viss del, och barnen få till uppgift att bestämma, hur stor bråkdel, som markerats. T. ex.: Hur stor del av detta pappersark har jag streckat over? 

b) De enklaste additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner utan användning av den vanliga bråkbeteckningen.

I samband med nu nämnda övningar givas enkla additions- och subtraktionsexempel med liknämnda bråk, t. ex. 2 femtedels ark + 2 femtedels ark = ?, 7 tiondels ark — 3 tiondels ark = ?, i vilka barnen alltså lära sig handskas med bråksorterna som med andra talsorter (såsom tiotal, par, dussin). I samband med dessa uppgifter kommer man också in på oegentliga bråk. 3 fjärdedels ark + 2 fjärdedels ark + 3 fjärdedels ark är ju *egentligen* icke någon bråkdel av ett ark och kallas *oegentligt bråk*. Så kallas ock alla tal, som till formen äro bråk, men som äro lika med eller större än 1. De bråk, som äro mindre än 1, kallas *egentliga bråk*. Termen blandat tal inläres, och barnen få öva sig att förvandla oegentliga bråk till blandat tal och tvärtom.

Multiplikation med heltalsmultiplikator bereder naturligtvis ingen svårighet. Att $2 \cdot 3$ tiondelar = 6 tiondelar, är ju egentligen lika lätt att förstå, som att $2 \cdot 3$ dussin = 6 dussin och fullkomligt analogt därmed. (I förbigående sagt mera analogt härmed än med satsen $2 \cdot 3$ äpplen $= 6$ äpplen, då dussin och tiondelar äro storheter av alldeles samma slag.) Den sanning, barnen just skola få upp ögonen för, är, att man kan räkna med tiondelar och andra bråksorter alldeles på samma sätt som med tiotal, dussin etc. — De delningsdivisioner, som skola givas, äro sådana, i vilka divisorn går jämnt upp i dividendens täljare, och ansluta sig alltså fullkomligt till det från heltalsläran bekanta. 6 tiondelar: 2 är naturligtvis lika med 3 tiondelar etc.

Något svårare är innehållsdivision med heltalskvot, men analogin med heltalssorterna hjälper dock snart barnen att komma till rätta med den. 2 tjugondedelar innehållas i 12 tjugondedelar 6 gånger, lika väl som 2 tjog innehållas 6 gånger i 12 tjog. Alltså 12 tjugondedelar : 2 tjugondedelar $= 6$ (gånger), fullkomligt analogt med 12 tjog : 2 tjog $= 6$ (gånger).

Vid dessa övningar *bör icke den vanliga bråkbeteckningen användas.* Det mest betydelsefulla med dessa övningar, nämligen att barnen lära sig handskas och räkna med bråksorter som med andra talsorter, befordras genom utskrivande av bråksorternas namn så, som ovan skett, medan användandet av den vanliga bråkbeteckningen snarast motverkar ernåendet av denna insikt genom att beteckningen lockar till uppfattning av täljaren och nämnaren som alldeles likartade talstorheter. Den vanliga bråkbeteckningen drager också lätt uppmärksamheten från saken till tecknet och kan fresta till inlärande av olämpliga regler för räknandet. Beteckningen $\frac{2}{10} + \frac{5}{10} = ?$ kan ju möjligen locka någon till att giva regeln, att addition av bråk med lika nämnare skall ske genom täljarnas sammanläggning, medan vid beteckningen 2 tiondelar + 5 tiondelar ingen kan komma på idén att formulera en så enfaldig regel. På samma sätt vid multiplikation. Vid multiplikation t. ex. av $3 \cdot \frac{5}{10}$ gives kanske regeln, att multiplikationen verkställes genom att bråkets täljare multipliceras med 3, medan nämnaren blir oförändrad, men vid beteckningen $3 \cdot 5$ tiondelar kan ingen gärna komma på idén att formulera i en regel en så självklar sak. Det är av betydelse, att barnen blivit något förtrogna med räkningen med de nya talsorterna och som en självklar sak utfört ovannämnda räkneoperationer inom de fem räknesätten, innan den vanliga bråkbeteckningen införes.

c) De fem räkneoperationerna med vanlig beteckning.

Vid något mera komplicerade tal blir ju den vanliga beteckningen bra att använda, och inläres. Någon särskild förklaring av bråkstrecket gives ej, utan barnen få helt enkelt lära sig att 2 tredjedelar tecknas $\frac{2}{3}$, etc., att strecket kallas bråkstreck, samt att talet under strecket ger upplysning om vilken bråksort det är fråga om, och att talet över strecket angiver antalet av bråksorten ifråga. Namnen täljare och nämnare inläras *ej* nu. De leda tanken ytterligare i riktning mot täljaren och nämnaren som likartade tal, och framför allt: de locka lätt läraren att formulera dessa skadliga regler om hur täljaren och nämnaren skola behandlas vid de olika räkneoperationerna, som vi nyss exemplifierade.

Några exempel på de räkneoperationer inom de fem räknesätten, som avses:

1) $3\frac{1}{10} + 2\frac{4}{10} + 5\frac{2}{10} + 1\frac{4}{10} = 12\frac{1}{10}$.

2) $2\frac{4}{10} - \frac{3}{10} = 2\frac{1}{10}$; $3\frac{6}{10} - 1\frac{7}{10} = 2\frac{16}{10} - 1\frac{7}{10} = 1\frac{9}{10}$.

3) $3 \cdot 1\frac{2}{5} = 3\frac{6}{5} = 4\frac{1}{5}$ eller $3 \cdot 1\frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$.

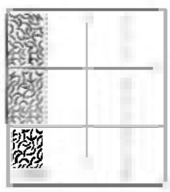
Barnen göras förtrogna med båda metoderna för multiplikationens utförande.

4) $4\frac{4}{7} : 2 = 2\frac{2}{7}$; $3\frac{2}{10} : 2 = 1\frac{6}{10}$.

5) $5\frac{6}{10} : \frac{7}{10} = \frac{56}{10} : \frac{7}{10} = 8$;
$37\frac{5}{10} : 7\frac{5}{10} = \frac{375}{10} : \frac{75}{10} = 5$.

d) Uträkning av heltalsdivision med rest.

Om 13 äpplen skola delas lika mellan 4 pojkar, får naturligtvis var och en $3\frac{1}{4}$ äpplen; men hur resten i 15 äpplen : 4 skall uttryckas, är nog ej genast klart för barnen. Det blir ju 3 till rest. De inse snart, att delningen kan ske genom att vart äpple delas i fyra delar. Av vart äpple blev det således $\frac{1}{4}$ äpple till var pojke, och av de tre äpplena alltså $\frac{3}{4}$ äpple. Alltså: 15 äpplen : $4 = 3\frac{3}{4}$ äpplen. I samband med sådana exempel tager man fasta på att t. ex. $\frac{1}{4}$ av 3 är $\frac{3}{4}$ eller $3 : 4 = \frac{3}{4}$, att $2 : 5 = \frac{2}{5}$ etc. Och nu kan rätta tillfället vara inne att påvisa för barnen, att bråkstrecket kan betraktas som ett delningstecken, ty $\frac{3}{4}$ var ju lika med $\frac{1}{4}$ av 3, som även tecknas $3 : 4$. Denna sanning kan åskådliggöras t. ex. med en ritning så:



Det streckade partiet är $\frac{1}{4}$ av 3 ark men uppenbart också lika med 3 fjärdedels ark.

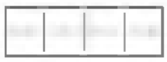
e) Uppfattning av bråkdelar av heltalssorter.

Den enhet, bråktalet hänför sig till, kan ju vara av många slag. Närmast få barnen tänka på grundenheten, men så småningom skola de inse, att enheten kan vara vilket tal som helst. De skola nu lära sig räkna med bråkdelar av heltalssorter och uttrycka resultatet i helt eller blandat tal, t. ex.: $\frac{1}{3}$ dussin kulor = 4 kulor; $\frac{2}{3}$ dussin = 8, $\frac{3}{4}$ tjog ägg = 15 ägg (ty $\frac{1}{4}$ tjog = 5) etc.

Här övas barnen med en mångfald uppgifter av olika slag. T. ex.: Uttryck i minuter $\frac{3}{4}$ timme, i cm. $\frac{2}{5}$ dm. etc. Man kan här — om man så önskar — inskränka sig till uppgifter, i vilka divisionen går jämnt upp, alltså $\frac{2}{5}$ dm. men ej $\frac{2}{3}$ dm.; först senare (vid multiplikation med bråkmultiplikator) behandlas i så fall uppgifterna av andra slaget.

Även enkla, omvända problem givas här. De bidraga bra till en klar bråkuppfattning. Alltså: hur stor del är 6 stycken av ett dussin?, 3 stycken?, 2 stycken?, 1 stycken? Och så kunna barnen ställas inför frågan, hur stor bråkdel av ett dussin kulor 5 stycken kulor äro, och lösa den genom att tänka på att 1 kula är 1 tolftedels dussin och 5 kulor alltså 5 tolftedels dussin kulor, etc.

§ 34. Avdelning II av bråkläran.

Sedan barnen väl behärska det i föregående avdelning behandlade, övergår man alltså till räkningar, innehållande förvandlingar från en bråksort till en annan. — Som redan framhållits är det lämpligt att först lära barnen utföra förvandling av en bråksort till viss uppgiven bråksort, innan deras uppmärksamhet tages i anspråk för lösande av problemet att finna ut, till vilken bråksort en given bråksort lämpligen skall förvandlas. Man sysslar alltså närmast med uppgifter, i vilka det gäller att förvandla till den minsta i uppgiften förekommande bråksorten. — Naturligtvis skola förvandlingarna åskådliggöras. Genom en ritning som denna  se barnen genast att 1 fjärdedel = 2 åttondelar. Likaledes att 3 fjärdedelar = 6 åttondelar. — Det är här liksom i allmänhet vid de grundläggande undersökningarna bra att utskriva bråksorternas namn, så som gjordes vid inledningen till bråkläran. Det är

viktigt att förhindra. att barnen för tidigt »upptäcka» knepet **att multiplicera** täljare och nämnare med samma tal, vilken upptäckt blott alltför lätt göres, när barnen få skriva $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, etc. Denna regel skall icke givas förrän långt senare, när barnen redan fullt säkert, regeln förutan, kunna utföra förlängningarna.

Ställas barnen inför uppgiften att taga reda på, hur många tjugondedelar 1 fjärdedel är, kunna de säkert genom ritning ta reda på det. Men barnen böra ej blott »se» utan »inse», och läraren bör laga så. att barnen på det åskådliga tänkandets väg kunna lösa hithörande uppgifter. Gäller det att förvandla 1 fjärdedel till tjugondedelar kan tanken röra sig i t. ex. följande bana. För att finna, hur många tjugondedelar 1 fjärdedel är, få vi tänka oss enheten delad i tjugo lika stora delar och taga fjärdedelen av dem. Det blir 5; alltså är en fjärdedel = 5 tjugondedelar. Man kan skriva upp tankegången så: 1 fjärdedel = 5 tjugondedelar, ty 20 tjugondedelar : 4 = 5 tjugondedelar. Gäller det 3 fjärdedelar. ta vi först reda på, vad 1 fjärdedel är, och finna sen, hur mycket 3 fjärdedelar är; alltså: 1 fjärdedel = 5 tjugondedelar, 3 fjärdedelar = 15 tjugondedelar. Barnen få alltså lära sig förlänga bråk, t. ex. fjärdedelar till tjugondedelar, genom att besinna sig på vad som menas med fjärdedelar och tjugondedelar, och det är just det rätta; det är den tillbakagång till grundbegreppen, som vi förut framhållit som nödvändig för uppnåendet av ett gott resultat av undervisningen i bråkräkning. medan upptäckten och användningen av regeln att multiplicera täljare och nämnare med samma tal leder till mekaniskt regelräknande med öde att lika lätt glömmas, som det lätt inlärts. Ifrågavarande regel torde dock av flera skäl senare böra inläras. Det kan ske vid repetitionen i klass 6, då också namnen täljare och nämnare böra inläras. Men i klass 5 må barnen reda sig regeln förutan. Nu är det visserligen mycket troligt, att barnen alldeles på egen hand upptäcka den och börja utföra förlängningen mekaniskt med regelns hjälp, och däråt är då intet att göra. Men läraren bör i alla händelser icke bidraga till en för tidig upptäckt.

Vad förkortningen beträffar, behandlas den här mycket summariskt. Att kunna förkorta ett bråk är ju också mindre viktigt än att kunna förlänga det. De förkortningar, som å detta stadium övas, böra egentligen endast vara sådana, i vilka ett bråk förkortas till ett stambråk. Att 4 tjugondedelar = 1 femtedel, kunna barnen inse genom att tänka på det hela som bestående av tjugo tjugondedelar, av vilka de 4 tjugondedelarna tydligen äro en femtedel (ty 20 tjugondedelar: 4 tjugondedelar = 5); alltså 4 tjugondedelar = 1 femtedel. Men förkortningar av sådana bråk som $\frac{4}{20}$ bli ju något mera komplicerade, och vi tro, att de lämpligen inövas i klass 6 i samband med inlärande av den vanliga regeln för förlängning och förkortning.

Några exempel på de uppgifter, som skola behandlas i denna avdelning, följa här.

Additioner.

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{7}{16}.$$

Uträknas genom bråkens förvandling till sextondelar:

$$\tfrac{8}{16} + \tfrac{12}{16} + \tfrac{10}{16} + \tfrac{7}{16} = \tfrac{37}{16} = 2\tfrac{5}{16};$$

$$35\tfrac{3}{10} + 67\tfrac{28}{100} + 9\tfrac{45}{1000}.$$

Bråken förvandlas till tusendelar.

35	300	tusendelar
67	280	»
+ 9	+ 45	»
111	625	»

Alltså lika med $111\tfrac{625}{1000}$.

Subtraktioner.

[illegible]

Innehållsdivision med heltalskvot.

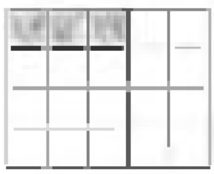
$$2\tfrac{2}{3} : \tfrac{8}{21} = \tfrac{56}{21} : \tfrac{8}{21} = 7.$$

Delningsdivision med heltalsdivisor.

Nu behandlas läran om delningsdivision med heltalsdivisor fullständigt, alltså ej blott de fall, då divisorn går jämnt upp i dividendens täljare.

$\tfrac{1}{4}$ av $\tfrac{1}{5}$ eller $\tfrac{1}{5} : 4$ blir $= \tfrac{1}{20}$ och $\tfrac{3}{5} : 4 = \tfrac{3}{20}$.

Detta inses nu lätt av barnen. Naturligtvis bör det ock genom ritning demonstreras, t. ex.:



Det streckade partiet är ju $\frac{1}{4}$ av $\frac{3}{5}$ och uppenbart lika med $\frac{3}{20}$. Delning av oegentliga bråk och blandade tal övas ock. $\frac{6}{5} : 4 = \frac{6}{20}$ och $5\frac{1}{5} : 4 = 1\frac{6}{20}$, etc.

§ 35. **Avdelning III av bråkläran. (Decimalbråk.)**

a) Beteckningen. Förlängning och förkortning. Multiplikation och division med 10, 100 etc.

Efter undersökning av de talvärden, siffrorna i ett helt tal beteckna, kunna barnen få angiva, vad en siffra till höger om entalen skulle beteckna för talsort. Men något tecken behövs för att utmärka, vilken siffra som betecknar entalen. Man har kommit överens om att utmärka det genom ett komma efter entalen, decimalkommat. Ibland skrivas också decimalerna med mindre siffror, men detta är av sekundär betydelse. Det är tydligt, att denna överenskommelse för med sig, att tusentalet ej får utmärkas genom ett komma, som understundom sker.

Barnen få så angiva vilka talsorter de olika siffrorna i t. ex. 11,111 beteckna. Den första decimalen betyder alltså $\frac{1}{10}$, den andra $\frac{1}{10} : 10 = \frac{1}{100}$, den tredje $\frac{1}{100} : 10 = \frac{1}{1000}$. Man skulle alltså kunna utläsa talet som 11 hela, 1 tiondel, 1 hundradel och 1 tusendel. Men om vi förvandlade alla bråkdelarna till tusendelar, få vi ju 111 tusendelar. Man ser genast, hur lätt barnen — på grund av den föregående kursen i allmänna bråk — böra kunna inlära decimalbråken. Så vidtaga *övningar i att skriva och utläsa decimalbråk.* En god övning är att angiva och skriva en lägre sort som bråkdel av en högre, t. ex. 5 gr. = 0,005 kg.; 3 cm. = 0,03 m.

En av de största fördelarna med det nya beteckningssättet är, att multiplikationer och divisioner med 10, 100 etc. så lätt med dess hjälp kunna verkställas. Sedan barnen blivit något förtrogna med beteckningen, tar man itu med dessa multiplikationer och divisioner. Föreläggs barnen uppgiften $10 \cdot 12{,}4$, är det väl möjligt att de svara med 12,40. Svaret undersökes, och nu komma barnen underfund med att 12,4 och 12,40 äro lika stora; 4 tiondelar är ju lika med 40 hundradelar. Så förvärva barnen insikt i hur förlängning och förkortning i decimalbråk verkställes. — Multiplikationsuppgiften löses på förut inlärt sätt, $10 \cdot 12\frac{4}{10} = 120 + \frac{40}{10} = 124$. Alltså $10 \cdot 12{,}4 = 124$. Barnen få lösa åtskilliga exempel på detta sätt. T. ex. $10 \cdot 1{,}21 = 10 \cdot 1\frac{21}{100} = 10\frac{210}{100} = 12\frac{10}{100}$, alltså $10 \cdot 1{,}21 = 12{,}10$ eller 12,1. Det dröjer ej länge, förrän det ena efter det andra av barnen strax efter det frågan framställts äro färdiga med svaret. De ha upptäckt det lätta sätt, på vilket en sådan multiplikation kan utföras. Och de få omtala sin upptäckt, och den funna metoden förklaras, så att alla inse dess riktighet. Så upptäckes också regeln för multiplikation med 100, 1 000 etc. samt för division med dessa tal.

Barnen böra ej använda reglerna helt mekaniskt utan tänka på vad de göra, när de flytta decimalkommat. Om barnen kunde fås att ej blott som en ren minnesläxa behandla frågan om decimalkommats flyttning till *höger* eller *vänster* utan ville tänka efter, om talet skall bliva *större* eller *mindre*, skulle de ej så lätt flytta kommat åt orätt håll vid multiplikation resp. division.

Naturligtvis övas även heltalsdivisioner av typen 3 465 : 100, 32 : 1 000, allt tills full säkerhet är uppnådd.

b) Additioner och subtraktioner.

Metoden är ju alldeles densamma som vid heltalsläran. Ex. 31,45 + 6,735 + 9,007 + 84,1 + 96,05 + 3,04. Vid uppställningen till uträkningen sker lämpligen förlängning, alltså

$$\begin{array}{r} 31,450 \\ 6,735 \\ 9,007 \\ 84,100 \\ 96,050 \\ 3,040 \\ \hline 230,382 \end{array}$$

Man kan till en början några gånger redogöra för talsorter, alltså 7 + 5 tusendelar är 12 tusendelar, 2 tusendelar skrives upp och de 10 förvandlas till 1 hundradel, som blir »minnet» etc., men utför snart sammanläggningarna utan sådan redogörelse, alldeles som i hela tal. I fråga om subtraktion är också allt fullkomligt analogt med heltalsläran.

c) Multiplikation med heltalsmultiplikator.

En uppgift som $67 \cdot 2{,}05$ hava barnen lärt sig lösa på två sätt, antingen $67 \cdot 2 + 67 \cdot \frac{5}{100}$ eller $67 \cdot \frac{205}{100}$. Vi tillämpa här den sista metoden och uppställa talet helt enkelt så:

$$\begin{array}{r} 2,05 \\ 67 \\ \hline 1\,435 \\ 1\,230 \\ 137,35 \end{array}$$

och utföra multiplikationerna, som vore det fråga om hela tal. Men produkten 13 735 är hundradelar och skall alltså divideras med 100, vilket sker genom avskiljande av 2 decimaler.

d) Innehållsdivision med heltalskvot.

11,28 : 0,47 behandlas som vid allmänna bråk. Båda talen förvandlas alltså till hundradelar, och uträkningen blir helt enkelt 1 128 : 47, alltså en heltalsdivision.

e) Delningsdivision med heltalsdivisor.

7,32 : 2 = 3,66. Uträkningen blir som i heltalsläran. Först delas entalen, så tiondelarna och slutligen hundradelarna.

```
   16,096
   434,6 : 27 = 16,096
 — 27
   164
 — 162
     260
   — 243
      170
    — 162
        8
```

Vid sådana räkningar få barnen lära sig att förvandla resten till mindre delar och så fortsätta delningen. Den rest av 26 tiondelar, som här uppträder, förvandlas till 260 hundradelar, och så fortsättes delningen med bestämning av hundradelar, tusendelar etc. i kvoten, så långt nödigt anses.

Så uträknas också *heltalsdivisioner med rest.* T. ex.

```
   29,25
   585 : 20 = 29,25
 — 40
   185
 — 180
     50
   — 40
     100
   — 100
```

I samband härmed *övningar att förvandla allmänna bråk till decimalbråk.* $\frac{3}{4}$ kan ju uppfattas som 3 : 4, vilken division utföres 3 : 4 = 0,75. Dessa förvandlingar övas flitigt. Även med bristfälliga kunskaper i allmänna bråk kan ju en uppgift, i vilken sådana bråk förekomma, klaras upp, genom bråkens förvandling till decimalbråk.

§ 36. **Avdelning IV av bråkläran.**

Sedan barnen kunna utföra förvandlingar från en bråksort till annan uppgiven bråksort, ställas de inför den nya svårighet, som t. ex. uppgiften $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = ?$ innebär. Bråksorterna äro olika, och tredjedelar kunna ej förvandlas till femtedelar[1]), ty $\frac{1}{3}$ av 5 går ej jämnt upp. Barnen ställas så inför problemet att finna en bråksort, till vilken både tredjedelar och femtedelar kunna förvandlas. Problemet löses naturligast genom systematiska försök. Med utgångspunkt från de minsta delarna — femtedelarna — börjar man uppsökandet. Närmast mindre sort, till vilken femtedelar kunna förvandlas, är tiondelar, men något jämnt antal tiondelar kunna vi ej få av $\frac{1}{3}$, ty delning av 10 tiondelar med 3 går ej jämnt upp. Nästa sort blir femtondelar, och till den kunna även tredjedelar förvandlas. Vi få alltså

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15};$$

Annat exempel:

[illegible]

Sammanläggning av flera bråk utföres genom att bråken läggas samman två och två. Med den angivna metoden finner man den största gemensamma bråksort, till vilken bråken kunna förvandlas. Vill man endast finna en gemensam bråksort, till vilken de två bråken kunna förvandlas — utan avseende vid om det är den största möjliga — kan ju en sådan finnas på enklaste väg genom nämnarnas multiplikation. I ovannämnda exempel kunde ju både tolftedelar och femtondelar förvandlas till 12 · 15 delar. Denna enkla metod påpekas för barnen, om de ej själva hitta på den. Med nu angivna metoder torde barnen tämligen lätt kunna klara upp alla hithörande problem, som kunna möta dem i det praktiska livet, och så till vida kunde det vara överflödigt att meddela dem någon annan. I alla händelser bör man ej nu meddela den vanliga — ur matematisk synpunkt nog så eleganta — metoden med uppdelning i primfaktorer etc. Denna sparas — såsom föreslagits i lärogången — till sist i klass 6, och meddelas endast, om läraren anser tiden räcka till ordentligt.

Utom additioner och subtraktioner kunna i detta sammanhang en del innehållsdivisioner övas, såsom $\frac{4}{6} : \frac{2}{15} =$ [illegible] $= 5$.

[1]) *Anm.:* Underförstått till *helt antal* femtedelar, ty naturligtvis kan 1 tredjedel uttryckas som $1\frac{2}{3}$ femtedelar.

§ 37. Så mycket som vi nu genomgått av bråkkursen, ha vi tänkt skulle medhinnas i klass 5. I sjätte klassen tages först en repetition. Vid denna meddelas och förklaras den vanliga regeln för förlängning och förkortning. Namnen täljare och närmare införas. Många ord behöva inte användas på förklaring av förlängningsregeln. Barnen kunna ju redan förlänga, och ha kanske redan upptäckt regeln. Och kan man utan att förändra ett bråks värde multiplicera dess täljare och nämnare med samma tal, har man tydligen också rätt att dividera dem med samma tal. Vid förkortningen gäller det alltså att finna ett tal, som går jämnt upp både i täljare och nämnare. Ganska ofta går bråket att förkorta med något av de ensiffriga talen, och det kan därför vara bra att ha regler, med vilkas hjälp man snabbt kan avgöra, om ett tal är jämnt delbart med något av dessa tal. Goda sådana regler finnas ju beträffande alla de ensiffriga talen utom för sju. För sjuan finnes ingen snabbare metod än den vanliga divisionsmetoden. Åtminstone en del av dessa regler böra barnen känna till. Regeln för åtta är ej mycket värd och särskild regel för 6 är överflödig. Reglerna kunna mycket väl meddelas barnen, utan att man bevisar dem. Ett sannolikhetsbevis få ju barnen i alla fall ur erfarenheten, att reglerna alltid stämma.

Bevisen för 2, 4, 8 och 5 äro alla av samma typ. Eftersom 2 och 5 gå jämnt upp i 10, gå de jämnt upp i ett godtyckligt antal tiotal. Huruvida 2 eller 5 går jämnt upp i ett tal, blir således endast beroende av talets entalssiffra. Eftersom 4 går jämnt upp i hundra, går det jämnt upp i ett godtyckligt antal hundratal. Huruvida 4 går jämnt upp i ett tal, blir således endast beroende på om det går jämnt upp i det tal, som bildas av de båda sista siffrorna i talet. 8 går jämnt upp i 1 000 och går alltså jämnt upp i ett tal, om det går jämnt upp i det tal, som bildas av de tre sista siffrorna i talet. Delbarhetsregeln för 3 och 9 följer omedelbart ur den förut bevisade satsen — se § 25 —, att ett tals siffersumma är en niorest. Är denna niorest jämnt delbar med 9 eller 3, är talet alltså självt jämnt delbart med 9 eller 3.

I fråga om terminologien vid förlängning och förkortning får läraren noggrant se till, att barnen ej använda orden multiplikation och division i stället för förlängning och förkortning.

§ 38. Avdelning V av bråkläran.

1. Multiplikation med bråkmultiplikator.

Multiplikation med bråkmultiplikator är i sak ingen nyhet för barnen. All delningsdivision i hela tal kan ju sägas höra hit, och barnen ha löst uppgifter ej blott med stambråk utan även med andra bråk som multiplikatorer, men de ha ej *betecknat* uppgifterna så, och således ej uppfattat dessa tal som multiplikationstal. Här ha vi en viktig nyhet, som de nu skola lära sig. Och så ha de ju endast räknat de enklaste hithörande uppgifter, väl t. ex. $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{5}$ men ej $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$.

a) *Hur skall detta beteckningssätt motiveras för barnen?*

Vi ha redan, vid utredningarna om räknesättens innebörd i § 15. något uppehållit oss vid denna fråga, men vilja här ytterligare understryka dess betydelse, då det ju gäller den för räkningen fundamentala frågan om räknesättens innebörd. Ett gott resultat av undervisningen kan lätt äventyras genom felgrepp på denna punkt. Att helt enkelt utan vidare motivering lära barnen att »av» tecknas som »gånger» måste verka förvirrande och nedslående på deras lust att använda sitt förstånd vid arbetet med räkningen. Kanske har betydelsen av begreppet gånger aldrig förklarats på annat sätt än genom att barnen en, två, tre etc. gånger fått gå och hämta en sak, men vad menas då med att taga någonting $\frac{1}{2}$ gång, och hur mycket får man av den sak, man skulle hämta, om man stannar på halva vägen? Det gäller alltså att lära barnen att i begreppet gånger inlägga en vidare betydelse, så att det även kan hänföra sig till »halva gånger». En sådan utvidgning av ett ords betydelse är ju något ganska vanligt och torde inte bereda barnen någon större svårighet, om saken bara tages upp på ett förståndigt sätt. Vi ha i det föregående — se § 15 — rekommenderat ordet »stycken» som lämpligt att ibland användas omväxlande med ordet gånger, alltså t. ex. $3 \cdot 8$ är 3 gånger 8 eller 3 stycken av talet 8, varigenom användningen av ordet gånger i utvidgad betydelse underlättas. Man kan ju mycket väl taga halva »stycken», fast det bjuder emot att taga halva »gånger». Multiplikationsbeteckningen med bråktal som multiplikator bör helst »uppfinnas» av barnen själva, och med litet ledning göra de det mycket lätt.

Läraren skriver t. ex. $17 \cdot 12$ på tavlan och säger t. ex.: »En handlande sålde en dag 17 dussin stenkulor. Nu skall ni få skriva upp, hur mycket han sålde denna och de följande dagarna, och sen skall vi räkna ut det». Och sedan barnen skrivit $17 \cdot 12$, dikterar läraren vidare: »5 dussin nästa dag» och ser till, att barnen skriva denna produkt under den förra.

Och så få barnen på samma sätt teckna åtskilliga exempel med helt antal dussin. Så kommer en uppgift som $5^1/_2$ dussin, och barnen torde utan tvekan teckna $5\frac{1}{2} \cdot 12$ i överensstämmelse med de andra. Och när så efter åtskilliga sådana exempel kommer en uppgift som $\frac{1}{2}$ dussin, teckna barnen den nog på önskat sätt.

$$
\begin{aligned}
17 \quad &\cdot 12 = \\
5 \quad &\cdot 12 = \\
13 \quad &\cdot 12 = \\
4 \quad &\cdot 12 = \\
5\,{}^{1}/_{2} &\cdot 12 = \\
3\,{}^{1}/_{4} &\cdot 12 = \\
15\,{}^{1}/_{2} &\cdot 12 = \\
\tfrac{1}{2} \quad &\cdot 12 = \\
\tfrac{3}{4} \quad &\cdot 12 = \\
6 \quad &\cdot 12 =
\end{aligned}
$$

Så ha barnen själva hittat på beteckningen och förstå dess betydelse.

Och naturligtvis givas inga regler för uträkningen. När barnen komma till $5\,{}^{1}/_{2} \cdot 12$ och veta, att det betyder $5\,{}^{1}/_{2}$ dussin, är ju uträkningsgången klar. Förmodligen taga de reda på, hur mycket 5 dussin och hur mycket $\frac{1}{2}$ dussin är. I sak är här ingen nyhet. Sådana uppgifter ha de redan räknat. Endast beteckningen är en nyhet. Då $5 \cdot 12$ utläses som 5 gånger 12 torde barnen finna det helt naturligt att utläsa $5\frac{1}{2} \cdot 12$ som $5\,{}^{1}/_{2}$ gånger 12 och $\frac{1}{2} \cdot 12$ som $\frac{1}{2}$ gånger 12. Vid det sista exemplet uppmärksammas, att man ju oftare säger hälften av tolv. $\frac{1}{2}$ gånger tolv är alltså detsamma som $\frac{1}{2}$ av 12. Omväxlande användas skrivsätten $\frac{1}{2} \cdot 12$ och $\frac{1}{2}$ av 12 etc. I fråga om beteckningen låter läraren barnen ordentligt uppmärksamma, att talet framför gångertecknet alltså angiver, hur »många» (eller det antal), som skola tagas av det tal, som står efter gångertecknet, och att ordet »många» här kan betyda såväl ett helt som ett brutet tal, såväl ett mycket stort som ett mycket litet tal.

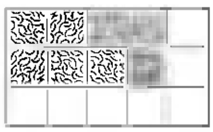
Även terminologien: delarnas antal, delarnas storlek och produkten, kan bidraga till en klar uppfattning. — Därefter övas beteckningen, även när multiplikanden (delarnas storlek) är ett brutet tal.

b) ***Metoden för utförande av räkneoperationerna.***

Vi ha redan i det väsentliga behandlat de fall, där multiplikanden är ett helt tal. $\frac{3}{4} \cdot 12$ räknas naturligtvis så, att man först beräknar $\frac{1}{4}$ av 12 och sedan tager detta 3 gånger. Och tal med oegentligt bråk som multiplikator räknas ut på samma sätt: $\frac{5}{4} \cdot 12$; $\frac{1}{4}$ av ett dussin är 3, som taget 5 gånger blir 15. Tal som $2\frac{1}{3} \cdot 12$ räknas naturligast så: $2 \cdot 12 + \frac{1}{3}$ av 12, men barnen böra också göras förtrogna med uträkning av sådana tal genom multiplikatorns förvandling till oegentligt bråk.

Så skola även göras beräkningar, i vilka delningen ej går jämnt upp, t. ex. $\frac{2}{3}$ av 28. Uträkningen gestaltar sig naturligast så: $\frac{1}{3}$ av $28 = 9\frac{1}{3}$ och $2 \cdot 9\frac{1}{3} = 18\frac{2}{3}$, men kan ju också uträknas så: $2 \cdot \frac{28}{3} = \frac{2 \cdot 28}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$, då ju $\frac{1}{3}$ av 28 är $\frac{28}{3}$, som förut visats — se § 33 d —. Barnen få också uppmärksamma, att skillnaden mellan detta beräkningssätt och det förra endast ligger i den ordning, i vilken divisionen och multiplikationen tagas. I ena fallet dividerades först med 3 och multiplicerades sedan med 2, i andra fallet gick multiplikationen före. Tydligt är, att det bör bli samma resultat.

Av de fall, då multiplikanden är ett bråk, äro förut behandlade tal av typen: $\frac{1}{3}$ av $\frac{4}{5}$. Utvidgningen till de övriga sker ytterst lätt. T. ex. $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$ är naturligtvis $2 \cdot \frac{4}{15}$, då $\frac{1}{3}$ av $\frac{4}{5}$ är $\frac{4}{15}$. Åskådning med delning av rektangel belyser saken bra.



Det överstreckade partiet är $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$. Genom användning av färgkritor kunna de olika delarna än tydligare utmärkas. När barnen några gånger räknat sådana exempel och skrivit $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot = \frac{8}{15}$ upptäcka de naturligtvis, hur lätt man kan utföra denna beräkning. Möjligheten av »korsvis» förkortning uppmärksammas så småningom. Vid t. ex. $\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21}$ kan till en början bråket först skrivas som $\frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 21}$, innan förkortning sker, men snart förkortas »korsvis» redan i den ursprungliga uppställningen, alltså $\frac{\overset{1}{7}}{12} \cdot \frac{\overset{1}{4}}{21} \cdot = \frac{1}{9}$.

Talet $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$ uträknas enklast som $\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{4}$, men barnen kunna gärna få jämföra med uträkningen $\frac{1}{2}$ av $3 + \frac{1}{2}$ av $\frac{1}{4}$. Då båda faktorerna äro blandade tal, uträknas produkten genom faktorernas förvandling till oegentligt bråk. Men även i detta fall kunna barnen någon gång få företaga uppdelning. T. ex. $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} = 3 \cdot 2\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}$.

c) *Uträkning med användande av decimalbråksbeteckning*

gestaltar sig på fullkomligt samma sätt som med allmänna bråk och behöver alltså endast antydas. Då barnen beräkna $3\frac{1}{10} \cdot 2\frac{1}{10}$ genom $\frac{31}{10} \cdot \frac{21}{10} = \frac{31 \cdot 21}{10 \cdot 10}$, är det ju klart, att de vid beteckningen $3{,}1 \cdot 2{,}1$ helt enkelt hava att multiplicera talen med varandra, som om de vore hela tal, och därpå dividera med 100, vilket ju sker genom att avskilja 2 decimaler, alltså

$$\begin{array}{r} 3{,}1 \\ \underline{2{,}1} \\ 31 \\ \underline{62} \\ 6{,}51 \end{array}$$

Att antalet decimaler, som i produkten skola avskiljas, alltså måste vara lika med sammanlagda antalet decimaler i de båda faktorerna, böra barnen göras uppmärksamma på.

Omkastning av faktorerna ändrar ju ej resultatet och tilllämpas alldeles som vid heltalsräkningen.

2. Innehållsdivision med bråkkvot.

a) *Innebörden.*

Här liksom vid multiplikation med bråkmultiplikator är det inte uträkningen, som är det mest besvärliga, utan uppfattningen av innebörden i beteckningen. Det är ju t. ex. för barnen en synnerligen enkel sak att taga reda på, att 6 kulor är hälften av ett dussin, men att lära sig teckna detta som 6 k. : 12 k. = $\frac{1}{2}$ faller sig ej så lätt för dem.

Om barnen blivit ordentligt förtrogna med multiplikation med bråkmultiplikator, torde de emellertid också kunna bliva förtrogna med motsvarande divisioner. Beteckningsövningar analoga med dem, vi föreslagit vid multiplikation, givas också här. Man bör vid utredning av beteckningens innebörd först använda uppgifter med helt tal både i dividend och divisor.

Hur många dussin kulor kan man få av 60 kulor? Teckna och uträkna! Efter uträkningen skrives till yttermera visso upp motsvarande multiplikation:

60 k. : 12 k. = 5, ty 5 · 12 k. = 60 k. Och så gives en rad liknande uppgifter, först sådana, i vilka kvoten blir ett helt tal, sedan ett blandat tal och till sist ett egentligt bråk. För varje tal skrives efter uträkningen motsvarande multiplikation; alltså t. ex.:

60 k. : 12 k. = 5 ty 5 · 12 k. = 60 k.
156 k. : 12 k. = 13 ty 13 · 12 k. = 156 k. etc.

30 k. : 12 k. = $2^1/_2$ ty $2\frac{1}{2}$ · 12 k. = 30 k.
40 k. : 12 k. = $3\frac{1}{3}$ ty $3\frac{1}{3}$ · 12 k. = 40 k. etc.

6 k. : 12 k. = $\frac{1}{2}$ ty $\frac{1}{2}$ · 12 k. = 6 k.
9 k. : 12 k. = $\frac{3}{4}$ ty $\frac{3}{4}$ · 12 k. = 9 k. etc.

Så länge ännu kvoten är större än 1, bereder beteckningen ej någon svårighet, och efter en grundlig förberedelse torde ej många barn tveka i fråga om beteckningen, när de ställas inför uppgiften, hur många dussin 6 kulor äro, utan teckna denna uppgift i överensstämmelse med alla de andra, alltså 6 k. : 12 k. = $\frac{1}{2}$.

En god åskådning kan givas genom exempel av följande typ. Hur många alnar kan man få av (eller innehållas i) 24 dm., 30 dm., 33 dm., 61 dm., 9 dm., 3 dm., 1 dm., 5 dm.? Talen tecknas så: 24 dm.: 6 dm. = 4, ty 4 · 6 dm. = 24 dm., etc., samt åskådliggöras genom uppritning av en linje av ifrågavarande längd, *vilken mätes med alnmått.* Det är bra, att vid dessa grundläggande övningar som divisorer använda talstorheter med särskilda namn, såsom dussin, aln, fot.

En serie ritningar verka mycket uppklarande. Liksom denna sträcka |————|————|————| innehåller 2 cm. 3 gånger eller innehåller 3 stycken 2 — centimetersbitar, så innehålla nedan stående sträckor följande antal 2 — centimetersbitar:

|————|————|——| $2\frac{1}{2}$ stycken (5 cm. : 2 cm. = $2\frac{1}{2}$)

|————|——| $1\frac{1}{2}$ » (3 cm. : 2 cm. = $1\frac{1}{2}$)

|——| $\frac{1}{2}$ » (1 cm. : 2 cm. = $\frac{1}{2}$)

Det uppmärksammas, att talet före divisionstecknet, som alltid vid division, motsvarar produkten vid multiplikation, och att talet efter divisionstecknet är delarnas storlek, medan det är delarnas antal, som sökes.

Sedan innebörden av en innehållsdivision, i vilken dividend och divisor äro hela tal men kvoten ett bråk, är förstådd, bereda de fall, i vilka även divisor och dividend äro bråk, föga svårighet. Förstå barnen innebörden i:

25 dm. : 6 dm. = ?, så förstå de den ock i
2,5 m. : 0,6 m. = ?

b) *Uträkningen av innehållsdivision med bråkkrot*

erbjuder ej stor svårighet, sedan innebörden är förstådd. Vid t. ex. 45 k : 12 k = ? konstateras först, att det blir 3 hela dussin och att resten blir 9, vilket ju är $\frac{9}{12}$ dussin. En sådan bestämning företogo barnen redan i avd. I av kursen (se § 30 e), och den utföres genom att de reflektera över att 1 är $\frac{1}{12}$ av ett dussin och 9 alltså $\frac{9}{12}$ dussin (eller förkortat $\frac{3}{4}$). Svaret blir alltså 45 k. : 12 k. = $3\frac{3}{4}$.

Vill man utbyta det allmänna bråket $\frac{3}{4}$ mot decimalbråk, kan det ju ske på sätt, som förut inlärts. Men man behöver naturligtvis i så fall ej först skriva upp bråket $\frac{9}{12}$ i kvoten utan kan direkt göra uträkningen i decimalbråk:

$$\begin{array}{r}
45 : 12 = 3{,}75 \\
-36 \phantom{: 12 = 3{,}75} \\
\hline
90 \phantom{: 12 = 3{,}75} \\
-84 \phantom{: 12 = 3{,}75} \\
\hline
60 \phantom{: 12 = 3{,}75} \\
-60 \phantom{: 12 = 3{,}75} \\
\hline
\end{array}$$

Uppgifter, i vilka dividenden och divisorn, endera eller båda, äro bråk, uträknas så, att bråken uttryckas i samma talsort, varefter de hela tal, som angiva bråksortens antal (alltså bråkens täljare), i dividend och divisor divideras, vilket förfaringssätt barnen ju redan ofta använt. T. ex.

$$13\tfrac{3}{4} : 1\tfrac{1}{3} = \tfrac{115}{12} : \tfrac{16}{12},$$

varefter man tar reda på, hur många gånger 16 innehålles i 115, alltså

$$\begin{array}{r}
115 : 16 = 7\tfrac{3}{16} \\
112 \phantom{: 16 = 7\tfrac{3}{16}} \\
\hline
3 \phantom{: 16 = 7\tfrac{3}{16}}
\end{array}$$

Vid decimalbråksbeteckning kan ju precis samma förfaringssätt användas. Ex. 62,972 : 17,3. Båda talen förvandlas till tusendelar och »heltalen» divideras, alltså

$$\begin{array}{r}
\overset{3{,}64}{62972} : 17300 = 3{,}64 \\
-51900 \phantom{: 17300 = 3{,}64} \\
\hline
110720 \phantom{: 17300 = 3{,}64} \\
-103800 \phantom{: 17300 = 3{,}64} \\
\hline
69200 \phantom{: 17300 = 3{,}64} \\
-69200 \phantom{: 17300 = 3{,}64} \\
\hline
\end{array}$$

Att förvandla både dividend och divisor till helt tal är ju något otympligt. När barnen vid genomgång av delningsdivision fått lära att endast göra divisorn till helt tal, tillämpas sedan samma metod även vid innehållsdivision, då ju resultatet av en tecknad division blir detsamma, vare sig den uppfattas som en innehålls- eller delningsdivision. (Omkastning av faktorerna i en multiplikation ändrar ju ej resultatet).

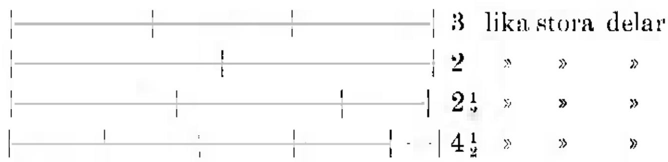
3. Delningsdivision med bråkdivisor.

a) *Innebörd och uträkning.*

Metoden för inlärande av innebörden blir alldeles analog med den, vi använt vid innehållsdivision. Det finnes också här, liksom vid innehållsdivision, två svårighetsgrader, alltefter-som delarnas antal (divisorn) är ett bråktal, större eller mindre än 1. Det är skäl att först behandla det lättare fallet, innan man övergår till det svårare.

Hur lång är en aln, när 3 alnar är 18 dm.? Tecknas 18 dm. : 3 = 6 dm. A tavlan delas en linje om 18 dm. i 3 lika stora delar. Hade vi nu en linje om 15 dm. och finge veta, att den var $2\frac{1}{2}$ alnar, skulle vi tydligen för att finna, hur lång en aln är, söka dela linjen i 3 delar, varav de två skola vara lika stora men den tredje endast hälften så stor som de båda andra delarna. Beteckningen blir helt naturligt 15 dm. [illegible] och resultatet — metoden att finna det omtalas strax — lika med 6 dm., ty $2\frac{1}{2} \cdot 6$ dm. = 15 dm.

Läraren bör genom olika delningar av linjer belysa delningens innebörd för detta fall, alltså då delarnas antal är ett blandat tal (lättfattligast om delarna äro flera än 2). T. ex.: Hur många lika stora delar innehålla dessa linjer?



Läraren kan t. ex. låta linjerna, som äro så uppdelade, vara 90 cm. och låta barnen genom mätning taga reda på delens storlek, varefter mätningens riktighet kontrolleras genom multiplikation.

90 cm. : 3 = 30 cm., ty $3 \cdot 30$ cm. = 90 cm.

90 cm. : 2 = 45 cm., ty $2 \cdot 45$ cm. = 90 cm.

90 cm. : $2\frac{1}{2}$ = 36 cm., ty $2\frac{1}{2} \cdot 36$ cm. = 90 cm.

90 cm. : $4\frac{1}{2}$ = 20 cm., ty $4\frac{1}{2} \cdot 20$ cm. = 90 cm.

Man bör också låta barnen själva utföra sådana delningar av linjer i ett uppgivet antal delar, varigenom man på säkraste sätt får veta, om de förstå innebörden i delningen. Så uppmärksammas, att vi här, som alltid vid delningsdivision, känna produkten och delarnas antal och söka deras storlek.

Vi ha i ovanstående exempel funnit resultatet genom mätning. Hur skulle vi kunnat räkna ut det? Sträckan à 90 cm. är t. ex. uppdelad i $2\frac{1}{2}$ lika stora delar, och det gäller att taga reda på, hur stor var och en av dessa lika stora delar är. Men $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; 5 sådana halvdelar innehållas alltså i sträckan à 90 cm. *En* sådan halvdel blir alltså 90 cm. : 5 = 18 cm., och 2 halvdelar (alltså den sökta delen) bliva 2 · 18 cm. = 36 cm. — På samma sätt, när linjen delas i $4\frac{1}{2}$ stycken lika stora delar. $4\frac{1}{2} = 9$ halva och varje sådan halvdel alltså 90 cm. : : 9 = 10 cm. Och varje hel del alltså 2 · 10 cm. = 20 cm. Ändå lättare gestaltar sig detta resonemang, när vi ha ett särskilt namn på delarna, t. ex. vid uppgiften: hur stor är en aln, när $4\frac{1}{3}$ alnar är 26 dm.? Tecknas 26 dm. : $4\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$ alnar är 13 tredjedels alnar. En tredjedels aln alltså 26 dm. : 13 = 2 dm. Och en hel aln alltså 3 · 2 dm. = 6 dm. Uträkningen tecknas lämpligen så:

26 dm. : $4\frac{1}{3}$ = 26 dm. : $\frac{13}{[illegible]}$ = $3 \cdot \frac{26\text{ dm.}}{13}$ = 6 dm.; varvid bråkstrecket använts som divisionstecken, $\frac{26\text{ dm.}}{13}$ i stället för 26 dm. : 13, med vilken användning barnen ju redan äro förtrogna. Mycket lämpligt är att låta barnen till en början åskådliggöra dessa uträkningar med ritningar. De rita upp en linje, som får beteckna den storhet, som skall delas, i detta fall alltså längden av $4\frac{1}{3}$ alnar, och dela alltså här linjen i 5 delar, av vilka 4 äro lika stora och den femte $\frac{1}{3}$ så stor som de andra, etc.

$5\frac{1}{4}$ kg. kostade 17,85 kr. Hur mycket kostar 1 kg.? Tecknas och uträknas:

$$17{,}85 \text{ kr.} : 5\tfrac{1}{4} = 17{,}85 \text{ kr.} : \tfrac{21}{4} = 4 \cdot [illegible]$$

Resonemanget: $\frac{21}{4}$ kg. kostar 17,85 kr.; 1 fjärdedels kg. alltså [illegible] kr. och ett helt kg. 4 gånger så mycket. Och resultatet finnes naturligtvis antingen genom att divisionen först utföres och sedan multiplikationen eller tvärt om.

Den berömda regeln om att en division kan utföras genom att »divisorn vändes upp och ner» etc. ger sig som synes helt lätt, om man endast betänker, vad beteckningen innebär, och vad det sålunda begäres, att man skall räkna ut.

Sedan barnen blivit förtrogna härmed, kunna de möjligen vara mogna för de svårare fallen, då divisorn är mindre än 1. Det är ju onekligen en konstig delning, där delen blir större än det, som delades! Men att det är riktigt att använda samma operationstecken även för detta fall, torde dock kunna klargöras för barnen, och väl bäst genom att de själva hitta på det. T. ex. genom en serie beteckningar av vad 1 kg. kostar, då priset på ett visst antal kg. är uppgivet. Ha de tecknat åtskilliga problem, i vilka efter divisionstecknet alltid satts kilogrammens antal, finna de det naturligt att göra så, även om kilogrammens antal skulle vara t. ex. $\frac{3}{4}$. Även de linjedelningar, vi förut använt, äro tjänliga. De uppritade sträckorna voro lika med **3**, 2, $2\frac{1}{3}$, **$4\frac{1}{2}$** stycken av den sökta sträckan. Vi kunna naturligtvis också låta den givna sträckan vara $1\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{2}$ eller $\frac{3}{4}$ etc. av den sökta sträckan. Beteckningen skulle bliva 90 cm. : $\frac{1}{2}$ = ? eller 90 cm. : $\frac{3}{4}$ = ?, alldeles analogt med 90 cm. : $4\frac{1}{2}$ = ? etc.

Talet före divisionstecknet angiver den givna sträckans längd, talet efter divisionstecknet angiver antalet av den sökta sträckan, som i den innehålles. Även när detta antal ej uppgår till 1, användes helt naturligt samma operationstecken, som när antalet är större än 1. Må man jämföra beteckningen 90 cm. : : $2\frac{1}{4}$ eller 90 cm. : $\frac{9}{4}$ = ? med 90 cm. : $\frac{3}{4}$ = ? Då den första beteckningen betyder, att 90 cm. innehålla 9 stycken av den sökta sträckans fjärdedelar, så är det uppenbart, att den senare beteckningen angiver, att 90 cm. innehåller 3 stycken av den sökta sträckans fjärdedelar; divisionstecknet är tydligen i senare fallet använt i alldeles samma betydelse som i förra fallet. När barnen förstå innebörden i beteckningen, är metoden för uträkningen given, då den ju är fullkomligt densamma, som när divisorn är ett blandat tal, alltså 90 cm. : $\frac{9}{4} = 4 \cdot \frac{90 \text{ cm.}}{9}$. (*En fjärdedel av den sökta sträckan är ju* $\frac{90 \text{ cm.}}{9}$ och hela den sökta sträckan alltså $4 \cdot \frac{90 \text{ cm}}{9}$.)

Vi ha alltså vid delningsdivision använt en annan uträkningsmetod än vid innehållsdivision. Lämpligt är att visa barnen, att resultatet blir detsamma, vare sig en tecknad division räknas ut på det ena eller andra sättet; man kan alltså använda, vilken av dessa metoder man behagar, det må vara fråga om den ena eller andra sortens division.

b) *Uträkningen vid decimalbråksbeteckning blir alldeles densamma.*

T. ex. 6,205 : 1,7. 6,205 skall alltså divideras med $\frac{17}{10}$, och vi ha ju sett, att detta sker genom multiplikation med 10 och division med 17, alltså

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3,647} \\ 62,05 : 17 = 3,65 \\ -51 \\ \hline 110 \\ -102 \\ \hline 80 \\ 68 \\ \hline 120 \\ -119 \\ \hline \end{array}$$

Som synes, blir det alltså vid delningsdivision i decimalbråk helt naturligt, att endast göra divisorn till helt tal. Även innehållsdivision uträknas sedan på detta sätt. Regeln blir alltså, att divisorn skall göras till helt tal. Barnen få uppmärksamma, att decimalkommat härvid alltid flyttas lika många steg i dividenden som i divisorn, varvid påpekas, att resultatet av en delning ju bör bliva oförändrat, när både det, som skall delas, och delarnas antal ökas i samma grad.

Detta kapitel om divisionerna i bråk verkar nog bra tungt, och man kan tveka, om det kan gå att leda barnen till rätta i alla dessa irrgångar. Med tanke härpå skulle vi vilja föreslå, att den lärare, som känner sig tveksam, om hans klass kan gå i land med dessa ting, beslutar sig för att utesluta förklaringen av divisionens innebörd i de båda svåraste fallen, alltså vad som menas med en innehållsdivision, då kvoten är ett egentligt bråk, och vad som menas med en delningsdivision, då divisorn är ett egentligt bråk. De övriga fallen torde icke sedan bereda några svårigheter. Och vi föreslå detta så mycket hellre, som barnen säkerligen icke få någon större praktisk nytta av sitt sysslande med de nämnda svåra fallen, ty de problem, i vilka dessa divisioner skulle tillämpas, kunna uträknas enkelt utan divisionsbeteckningen. (Se längre fram § 44.) Och även om en lärare för barnen förklarat innebörden i dessa divisioner, torde det ej vara klokt att söka tvinga barnen att vid problemlösningen använda beteckningen.

§ 39. **Avdelning VI av bråkläran.**

Den vanliga metoden för finnande av den minsta gemensamma nämnaren till olika bråk.

Vi ha redan lärt barnen en metod att finna den minsta gemensamma nämnaren — försöksmetoden i § 33. Kompletterad med kunskapen om att produkten av två bråks nämnare alltid kan användas som gemensam nämnare (fast visserligen i allmänhet ej den minsta), är denna metod god nog. Men har man tid och en god klass, kan man ju genomgå den vanliga matematiskt intressanta metoden att finna den minsta gemensamma nämnaren. I en klass där metoden ej genomgås, skulle läraren dock kunna lära ut den åt särskilt intresserade lärjungar. Vi ha sett, hur man i t. ex. $\frac{1}{12}+\frac{1}{9}$ kan pröva sig fram genom att förlänga $\frac{1}{12}$ successivt med 2, 3 etc. och för varje gång se efter, om niondelen kan förvandlas till samma bråksort, alltså om 9 går jämnt upp i den nämnare, som erhålles vid förlängningen av $\frac{1}{12}$. Barnen veta alltså eller kunna lätt förstå, att det endast gäller att finna det minsta tal, i vilket både 9 och 12 går jämnt upp, vilket tal ju måste innehålla både 12 och 9 som faktorer. Barnen skola alltså lära sig uppdela tal i primfaktorer — en i och för sig ganska trevlig övning —, varvid barnen betjäna sig av de förut inlärda reglerna angående tals delbarhet. Undersökning, om ett tal innehåller primfaktorer, större än 7, göres i allmänhet ej. Då $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ och $9 = 3 \cdot 3$, kan man säga, att för att 12 skall ingå som faktor i ett tal, måste detta tal innehålla åtminstone *två* faktorer 2 och *en* faktor 3, och för att 9 skall ingå i samma tal, måste det innehålla åtminstone *två* faktorer 3. Det sökta talet måste alltså innehålla två faktorer 2 och två faktorer 3, således $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Genom sådana resonemang kommer man lätt fram till den vanliga regeln, att den minsta gemensamma nämnaren utgör produkten av de primfaktorer, som förekomma i bråkens nämnare, varvid av varje slag av primfaktorer skall tagas det största antal, som finnes i någon av nämnarna. — Och så tillämpas lärdomen på en del additioner, subtraktioner och innehållsdivisionsuppgifter. — Vid sammanläggning av flera bråk kan man mycket väl nöja sig med att lägga dem samman två och två. — Man bör under alla omständigheter se till, att ej mycken tid åtgår till övningar att sammanlägga bråk med användning av nu behandlade metod. Man bör ock lägga märke till att undervisningsplanen direkt föreskriver, att de allmänna bråk, som man räknar med, skola ha *liten* nämnare.

TREDJE AVDELNINGEN.

Inövningsarbetet.

§ 40. Diverse frågor angående inövningsarbetet.

Ett betydande arbete måste barnen nedlägga på räkningen, innan de kunna utföra räkneoperationerna snabbt och säkert. Det är ej nog med att begripa och kunna för gången, utan sedan måste *inövandet* komma. Vi skola i det följande behandla några punkter av viss vikt för uppnående av ett gott resultat av detta inövningsarbete.

Skola barnen vinna säkerhet och förmåga att reda sig själva, får läraren ej ständigt gripa in under arbetets gång med rättande av barnens uträkningar. Ser han, att ett fel begås, behöver han alltså ej känna sig förpliktigad att genast ingripa, utan den elev, som har begått felet, bör, så vitt möjligt är, själv upptäcka, både att ett fel begåtts, och vari det består. Kanske upptäckes felet redan under räkningens lopp, kanske först vid den efterföljande prövningen. Ett räknefel kan vem som helst råka ut för att göra. Det avgörande vid bedömande av en persons räknefärdighet är i främsta rummet, om man kan lita på att han ej lämnar uträkningen, förrän han genom prövning förvissat sig om att han kommit fram till rätt resultat. Sedan barnet slutat skolan, måste det kunna lita på sig självt. Sällan finnes då någon till hands att övervaka dess uträkningar och påpeka felen. Ej heller finnes något »facit» att jämföra uträkningen med. Man måste själv kontrollera resultatet och upptäcka felet, om ett sådant begåtts. Vid uppgifter, i vilka det endast gäller att utföra viss angiven räkneoperation, böra barnen ej jämföra sina uträkningar med facit utan vänjas att lita på sig själva. Läraren kan ju för att bliva oberoende av lärobokens med facit försedda exempel själv uppskriva en rad sifferexempel på tavlan. Dessa kunna för övrigt lätt anordnas på en del trevliga och tidssparande sätt. (Se § 42.)

Inövningsarbetet skall i allmänhet ej drivas så, att en elev får räkna ett exempel framme vid tavlan, under det att de andra räkna samma exempel i sina räknehäften. Barnen tvingas mera att lita på sig själva, om alla få räkna i sina räknehäften, alltså utan hjälp av någon »förräknare» framme vid tavlan. *Tysta övningar* böra alltså bedrivas också i en A-skola; i en B-skola äro de ju självfallna. Vid arbetet i en A-skola har läraren vid de tysta övningarna tillfälle att giva individuell undervisning åt de barn, som äro i behov av sådan.

Vid prövningen av ett resultat skola barnen lära sig använda, vad man skulle kunna kalla »rimlighetsprovet», d. v. s. de skola tänka över, om resultatet är rimligt. Fel, som kanske kunna undgå uppmärksamheten vid detaljprövningen, kunna ofta så upptäckas, t. ex. en felplacering av decimalkommat. Detta prov är särdeles värdefullt, när det ej blott gäller att pröva riktigheten av en viss uträkning, utan om hela problemet är riktigt löst. — Att märka är slutligen, att räknefärdigheten till icke ringa del måste förvärvas genom barnens hemarbete. Det ringa antalet räknetimmar, med det mångahanda, där skall sysslas med, räcker ej till för att giva barnen den nödiga färdigheten. En avsevärd del av hemuppgifterna i räkning kunna bestå i uträknandet av tecknade räkneoperationer. En svårighet med alla hemuppgifter är, att de kunna bli för arbetsamma för en del av barnen, samtidigt som de äro väl lätta för en annan del. Ingenting hindrar emellertid, att läraren i fråga om de matematiska hemuppgifterna uppdelar klassen i olika avdelningar med olika räkneuppgifter.

§ 41. Om repetitioner.

Sedan ett kursmoment inlärts och inövats, kräves ock, att det vid olika tillfällen blir repeterat. Utom den repetition, som sker i samband med lösningen av blandade uppgifter, kräves en mera samlad repetition, vid vilken läraren noga tillser, att varje lärjunge behärskar förut genomgångna kursmoment. Provräkningar äro härvid mycket att rekommendera. Lämpligen ske sådana mera samlade repetitioner vid varje termins början och vid läsårets slut. Smärre repetitionsövningar böra anordnas mycket ofta och behöva endast taga några minuter av en lektionstimme i anspråk. Ofta låter man väl en lektion börja med en liten huvudräkningsövning, i vilken repetitionsövningar kunna inläggas. Läraren bör göra upp en plan för dessa övningar och hålla reda på, att alla kursmoment, han önskar repetera, komma med. Som lämpligt stoff för dessa repetitioner i olika klasser må nämnas: övningar angående talens plats i talserien och talens beteckning; tilläggning och fråndragning av ental; fråndragningar från talet 100; multiplikations- och divisionstabellen; multiplikation av tvåsiffriga tal, särskilt talen 11—19, med ensiffriga; sortförvandlingar; förvandlingar mellan helt tal och bråk och mellan bråksorterna; enkla procenttal.

§ 42. Inövningsarbetet ur intressesynpunkt.

God övning att utföra räkneoperationerna få ju barnen i samband med problemlösningen, men då varje problem kräver åtskillig tid, och själva utförandet av räkneoperationerna vid detta arbete endast är en detalj, är det svårt att giva barnen tillräckligt av den nödiga övningen enbart genom den egentliga problemlösningen. Vid bestämmande av problemens beskaffenhet kan man ej heller taga hänsyn till vilka uträkningsövningar barnen särskilt behövde sysselsättas med. Vi finna alltså, att jämte de egentliga problemen också måste givas övningsexempel, i vilka det endast är fråga om att öva den mera mekaniska räknefärdigheten. Nu är det ju emellertid så, att tröttande, intressedödande enformighet hotar, om räknetimmarna i stor utsträckning användas till uträkning av det ena sifferexemplet efter det andra. Emellertid torde åtskilligt kunna göras för att få in mera av intresse i dessa rena sifferräkningar. En väg är att föra in *tävlingsmomentet* vid uträkningen. Vem har först räknat dessa uppifter och räknat dem rätt? Vem hinner räkna de flesta exemplen på 10 minuter? etc. Utan tvivel kan man få räkningen att gå med liv och lust genom ett sådant grepp, men det har ju den olägenheten med sig, att barnen frestas att slarva med prövningen för att hinna med så många tal som möjligt. Man bör alltid vid dessa tävlingar låta den, som räknat en enda uppgift orätt, placeras efter den, som räknat alla rätt, även om den förste räknat många fler uppgifter.

Ett annat sätt att stimulera intresset vid räknandet av sifferexempel är att låta någon sorts egendomlighet komma fram vid exemplen. Siffrornas inställning i någon geometrisk figur är redan tillräckligt, för att barnen skola finna det roligare att räkna ut talen. T. ex. additionstal så här:

35 674	4 752	6 964	6 023	59 412	8 000	943	12 593
4 368	61 975	3 748	9 871	1 200	300	1 261	6,000
90 073	50 000	1 234	84 900	38	4 000	13 043	798
765	3 800	5 978	30 000	642	7 000	27 599	3 452
1 123	127 341	1 243	684	9 050	10 000	304	7 934

En mängd additionstal kan man ju få fram ur en sådan figur, i det talen i varje horisontal- och vertikalrad adderas. Ett särskilt intresse kommer till uppgiften, om man prövar uträkningens riktighet genom att se efter, om summan av horisontalraderna överensstämmer med summan av vertikalraderna. Man kan få fram ändå fler additionstal ur figuren, om man så önskar, t. ex. genom sammanräkning av diagonalerna.

Intresset kan ytterligare ökas, om resultatet av uträkningarna äro på något sätt kuriösa, som t. ex. vid de s. k. *magiska kvadraterna*. Namnet härstammar från en tid, då de ansågos som bärare av magiska krafter. En metallplatta, i vilken en sådan kvadrat var inristad, ansågs skydda bäraren för trolldom och sjukdomar. En sådan kvadrat är nedanstående.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

I en magisk kvadrat skall alltid summan av alla horisontal- och vertikalrader och av de båda diagonalraderna bliva densamma. Ovanstående magiska kvadrat är särskilt märkvärdig, då summan 34 framkommer genom addition av talen i fyra rutor på ändå fler sätt.

Ett arbete, som mycket intresserar barnen, är att fylla i en del tomma rutor i en sådan magisk kvadrat. T. ex. i nedanstående.

4	29	12		20	45	28
35	11	36		44	27	3
10		18	43	26	2	34
41	17		25	1	33	9
16		24	7	32	8	40
47	23	6	31	14		
22	5	30	13		21	46

En enkel regel för bildande av magiska kvadrater med udda sidoantal kan den lärare, som önskar konstruera sådana kvadrater, lätt nog få fram ur följande kvadrat, om han uppmärksammar, hur talen i ordning från 1 äro placerade.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Man placerar siffrorna i ordning efter varandra genom att följa diagonal rader snett upp åt höger (t. ex. 2, 3, 4); när man kommit till högra kanten, går man över till vänstra kanten en ruta högre upp (se hur 5 placerats efter 4), och när man natt upp till övre kanten, går man till nedre en ruta längre åt höger (se t. ex. 11 efter 10). Kan man ej tillämpa dessa regler (på grund av att resp. rutor redan äro fyllda) placeras en följande siffra under den föregående (t. ex. 8 under 7, då rutan 1 redan var upptagen). De intresserade kunna få närmare upplysningar om hithörande ting i t. ex. Ahrens, Mathematische Spiele (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 170).

Multiplikationsuppgifter kunna också givas genom tals inplacering i en geometrisk figur som t. ex. nedanstående.

34	15	92
125	60	38
206	45	73

Uppgiften blir att multiplicera talen i de olika raderna.

Även dessa uppgifter kunna uppställas i »magiska kvadrater», där produkten av talen i horisontal-, vertikal- och diagonalraderna blir densamma. Genom att barnen få i uppgift att fylla i tomma rutor i en sådan magisk multiplikationskvadrat få de också en intressant divisionsuppgift.

8		2
	16	

Genom att göra varje tal i en magisk kvadrat 2, 3 etc. gånger så stort kan läraren på ett enkelt sätt konstruera nya sådana kvadrater.

Understundom kunna tävlingsuppgifter, som anordnas av tidningar och tidskrifter bestå av aritmetiska talproblem, som lämpa sig för inövningsarbetet, och barnen komma säkerligen mycket villigt att ägna sig åt deras uträknande, varvid läraren naturligtvis giver den hjälp han anser erforderlig. Ett exempel (hämtat ur Hela världen, nr 1, 1916) följer här.

6	21	9	26	19	A
23	30	12	2	31	10
14	3	22	16	11	1
28	13	8	34	20	27
33	24	4	15	32	17
B	29	18	25	5	7

Det gäller att gå ut från rutan A och komma till B genom att draga en linje, som passerar 14 rutor. Talen i dessa passerade rutor skola tillsammans giva 213.

Alla räkningar, som innehålla någon sorts egendomlighet, är det roligt få utföra. T. ex. multiplikation med talet 142 857. Barnen få multiplicera detta tal med 2, 3, 4 etc. och finna, att sifferföljden hela tiden blir oförändrad, om man börjar på siffran 1 och efter siffran längst till höger fortsätter med siffran längst till vänster. 5 · 142 857 t. ex. blir 714 285, alltså 142 857. Multiplikation med 7 bildar ett säreget undantag. Även vid multiplikation med större tal framkommer samma egendomlighet; man skall endast taga bort de överskjutande första siffrorna och addera det tal, de bilda, till resten, t. ex. 134 · 142 857 blir 19 142 838, och om så 19 lägges till 142 838, får man igen 142 857 etc. Vid multiplikation med en multipel av 7 uppträder samma egendomlighet som vid multiplikation med 7.

Man kan påvisa kuriösa uträkningsmetoder och låta barnen genom ett antal exempel övertyga sig om deras riktighet, t. ex. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + etc. ända fram till 50 eller 100 kan uträknas helt enkelt så, att första och sista termen läggas samman och summan multipliceras med termernas halva antal.

Samma förfaringssätt kan tillämpas vid andra aritmetiska serier. Men något bevis ges ej, och naturligtvis är det inte alls frågan om något, som barnen skola komma ihåg, utan det hela framställes som en kuriositet, och barnen få genom många exempel övertyga sig om att regeln stämmer.

En del talproblem, som bruka uträknas medelst ekvation, lämpa sig också bra. Barnen skola här naturligtvis finna lösningen genom att *försöka sig fram.*

I detta sammanhang vilja vi ock fästa uppmärksamheten på *aritmetiska spel, lekar, konststycken och skämt.* Både ur inövnings- och tankeövningssynpunkt kunna de vara värdefulla. De kunna ock — särskilt skämtuppgifterna — givas som belöningar och till uppmuntran.

Vi giva några exempel, som kunna utgöra början till en samling av sådana uppgifter, som det ej är ur vägen, att läraren söker skaffa.

Leken: komma först till ett visst tal. Lekes av två personer, som växelvis få säga ett tal, bildat ur det tal, den andre förut sagt, genom tilläggning av ett tal inom visst talområde. Det första tal, som säges, skall ock ligga inom detta talområde. T. ex.: talet 100, talområdet 1—10. Lämpligt är, att det tal, som tillägges också utsäges. T. ex. A säger 1, B säger 6 till blir 7. A: 5 till blir 12. B: 1 till blir 13. A: 10 till blir 23 etc. Den, som först kan säga 100, har vunnit.

Sådana lekar kunna även anordnas i form av läggspel. En obegränsad mängd lekar av denna typ kunna anordnas, då ju bestämmelserna angående talet, man skall komma fram till, och talområdet för tilläggning kunna varieras i det oändliga.

Som exempel på ett konststycke nämna vi det bekanta: »Tänk på ett tal, fördubbla det, lägg 10 därtill, dela med 2, drag ifrån det tal, du först tänkte på.» Varefter uppgiftsställaren kan angiva: du har fem kvar. Algebraiskt gestaltar sig ju detta konststycke så: $\frac{2a + 10}{2} - a = 5$ eller $\frac{2a + b}{2} - a = \frac{b}{2}$. Läraren kan själv använda sin kunskap i algebra till utfinnande av många sådana konststycken. — Ett annat: en person skriver ett tresiffrigt tal, så får en annan person skriva ett tresiffrigt tal, och så skrives växelvis tresiffriga tal, så länge man behagar, varvid den, som skrivit det första talet, skriver det sista och kan därefter genast angiva summan av alla talen. Konststycket möjliggöres genom att han för var gång alltid skrivit tal, som tillsammans med det tal, som den andre skrivit, givit summan 999, och summan blir ju då mycket lätt att genast angiva.

$$\begin{array}{r}
362 \\
\left.\begin{array}{r}453\\546\end{array}\right\} \text{observera! } 999 \\
672 \\
327 \\
421 \\
578 \\
\hline
3\,359
\end{array}$$

Så ett exempel på *skämtuppgifter*. En snigel kryper uppför ett träd och hinner 5 m. var dag men faller om natten ner 4 m. Efter hur många dagar har den nått upp till toppen, när trädet var 17 m. högt?

Och så till slut ett exempel på en skämthistoria. *Svensson begär löneförhöjning. Svensson:* Säg, direktörn, så hårt, som jag arbetar, kan jag väl fa en liten löneförhöjning? *Direktören:* Arbetar Ni så mycket då, herr Svensson? *S.* Ja visst, jag ligger i som en liten röd hund. *D.* Låt se, det var ju 366 dagar förra året, eller hur? *S.* Jovisst. *D.* Nå Ni sover 8 timmar om dygnet. *S.* Jo, jo män. *D.* Det blir alltså 1/3 av året = 122 dygn, återstår alltså 244 dygn. *S.* Stämmer. *D.* 8 timmar om dagen är Ni ju fri, inte sant? Och det gör 122 dygn. Återstår alltså 122 dygn. *S.* Alldeles riktigt. *D.* Om söndagarna arbetar Ni ju inte. Då går alltså 52 dygn bort och 70 återstå. *S.* Hm. — Jaa. *D.* På lördagarna arbetar Ni ju bara halva dagen, så då går bort 26 dagar och 44 blir kvar. *S.* A, jaha, jaha, ja visst ja. *D.* 14 dar hade Ni semester, inte sant? *S.* Jaha, det hade jag. *D.* Återstår alltså 30 dagar. Så är det ju 9 helgdagar på året, så att det bara återstår 21 dagar. *S.* A, hm, hm, jo—o—o—o. *D.* 5 dagar var Ni sjuk, för att Ni festat för mycket. Det gör 16 dagar kvar. Och så har Ni varje dag 1 timmes lunch, det går ju åt 15 dagar. Alltså återstår 1 dag, och det var 1 maj, och då var Ni ledig. Det är allt tur för Er, herr Svensson, att det var skottår förra året, annars hade det fattats en dag för Er. — Svensson tog tillbaka sin ansökan om löneförhöjning.

F J A R D E A V D E L N I N G E N.

Problemlösningen.

§ 43. **Regula de tri metoden.** Lösningen av ett problem möjliggöres ju därigenom, att det finnes ett samband mellan den sökta storheten och en del givna storheter. Det praktiskt mest betydelsefulla sambandet ha vi, då storheterna äro proportionella. I sådana problem erhålles den sökta storheten med hjälp av tre givna, varav namnet regula de tri.

Lösningen av hithörande problem mekaniseras ofta för mycket. Man bör sträva efter att låta barnens tanke röra sig så enkelt och naturligt som möjligt. Namnet regula de tri bör helst undvikas. Barnen få lätt uppfattningen, att det är fråga om något nytt konstigt räknesätt. Regula de tri problem böra naturligtvis ej blott förekomma i samlad trupp utan inströdda bland uppgifter av annat slag. De bilda ju ej heller ett kursmoment i någon viss klass utan tillhöra alla klasserna från och med småskolans andra, i vilken ju redan mycket enkla regula de tri uppgifter kunna förekomma, t. ex.: hur mycket kostar 3 apelsiner, när 2 apelsiner kosta 20 öre? Vid regula de tri problem är det ofta bra att på ett överskådligt sätt uppställa de viktigaste uppgifterna, innan uträkningen vidtager. Redan här bör man dock vara på sin vakt mot mekaniseringen. Är uppställningen tydlig, kan mycket väl en viss variation i den tillåtas. Men tydlig bör den vara, så att man ur uppställningen kan utlösa problemets innehåll. Alltså t. ex. ej i allmänhet så:

12 — 96 9 — ?	utan:	12 blommor kosta 96 öre 9 » » ? ».

a) Uträkning genom tillbakagång till enheten.

Till hjälp vid problemlösningen gives naturligtvis ej någon sådan regel som »börja alltid med talet, som står över frågetecknet», vilket nästan verkar som en uppmaning till tanklöst räknande. I stället ledas barnen att låta sin tanke röra sig ungefär så här: det gäller att taga reda på, vad 9 blommor kosta; det vore lätt, om man visste, vad 1 blomma kostar; och det kan man taga reda på, när man vet, vad 12 blommor kosta. Barnen ta alltså reda på, vad 1 blomma kostar (96 öre : 12 = 8 öre), och multiplicera så 9 · 8 öre = 72 öre, vilka räkningar för övrigt äro så lätta, att någon skriftlig uppställning ej behövs. Vid regula de tri problem i klass 3 och 4 användes ej bråkstrecket som divisionstecken. Divisionen räknas för sig och multiplikationen för sig. Ex.: för 15 hl. stenkol betalades 26 kr. 25 öre. Hur mycket bör man efter samma pris pr hl. betala för 62 hl.?

15 hl. kosta 2625 öre
62 » » ? »

Uträkning:

$$\begin{array}{r} 175 \\ 2625 \\ -15 \\ \hline 112 \\ -105 \\ \hline 75 \\ 75 \end{array} \text{ öre} : 15 = 175 \text{ öre}$$

samt

$$\begin{array}{r} 175 \text{ öre} \\ \cdot 62 \\ \hline 350 \\ 1050 \\ \hline 10850 \text{ öre} \end{array}$$

Svar: 62 hl. böra kosta 108 kr. 50 öre.

I dessa klasser torde man ock göra klokt att inskränka hithörande uppgifter till sådana, i vilka divisionen går jamnt upp. Sedan barnen i klass 5 blivit förtrogna med vad vi i detta arbete kallat avdelning I av bråkläran (se § 33), kunna de få lära sig den vanliga beteckningen av dessa uppgifter med användande av bråkstrecket, alltså lära sig att teckna föregående uppgift så:

$$[illegible] \cdot \frac{2625 \text{ öre}}{[illegible]}$$

Barnen ha ju fått lära sig att bråkstrecket kan uppfattas som ett divisionstecken, att $2625 : 15 = \frac{[illegible]}{15}$. Nu blir det ju ock klart, att multiplikationen kan, om så önskas, utföras före divisionen, varvid ofta beteckningen blir $\frac{62 \cdot 2625}{15}$. Särskilt när divisionen ej går jämnt upp, är det vanligt att först utföra multiplikationen. Barnen kunna gärna några gånger få uträkna uppgifter på båda sätten. Ex.: Hur mycket skall man betala i hyra för 9 månader, när årshyran är beräknad till 1 700 kr.?

1) $9 \cdot \frac{1\,700 \text{ kr.}}{12} = 9 \cdot 141\frac{8}{12} = 1\,269 + \frac{72}{12} = 1\,275$ kr.

2) $\frac{9 \cdot 1\,700 \text{ kr.}}{12} = \frac{15\,300 \text{ kr.}}{12} = 1\,275$ kr.

Sedan barnen lärt förkortning i bråk, kan ju den senare uträkningen ytterligare förenklas.

Den »enhet», som det är fråga om vid dessa beräkningar, behöver ej alltid vara »grundenheten». Vet man, vad 500 kg. kosta, och skall uträkna priset på 1 800 kg., så beräknas naturligtvis först kostnaden av 100 kg., ej av 1 kg. Samma gäller naturligtvis, om talsorten är ett bråk. Vid t. ex.:

$\frac{3}{10}$ m. kostar 3,75 kr.
$\frac{7}{10}$ » » ? »

tänka vi först efter, vad $\frac{1}{10}$ m. kostar, och så vad $\frac{7}{10}$ m. kosta, alltså:

$$7 \cdot \frac{3{,}75 \text{ kr.}}{3}$$

Att här först taga reda på, vad 1 m. kostar för att därifrån härleda kostnaden av $\frac{7}{10}$ m. vore ju tanklöst. Till vilka otroliga uträkningar regeln, att man alltid skall gå till enheten, kan förleda, synes av följande, som citeras från en modern korrespondenskurs i räkning. »Om en arbetare på $4\frac{1}{2}$ dagar förtjänat 8,1 kr., hur stor blir med samma dagspenning hans förtjänst under $16\frac{1}{2}$ dagar?» Till detta gives följande handledning:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Dag.} & \text{kr.} \\ 4\frac{1}{2} & 8{,}1 \\ 16\frac{1}{2} & ? \end{array}\right| \text{ eller } \left|\begin{array}{ll} \text{Dag.} & \text{kr.} \\ \frac{9}{2} & 8{,}1 \\ \frac{33}{2} & ? \end{array}\right.$$

8,1 kr. förtjänar han på $\frac{9}{2}$ dagar, hur mycket på $\frac{1}{2}$ dag? Svar: 9 gånger mindre $= \frac{8{,}1}{9}$ kr. *Så* mycket på $\frac{1}{2}$ dag, hur mycket på 1 dag? (!) Svar: 2 gånger mera $= \frac{2 \cdot 8{,}1}{9}$ kr. *Så* mycket på 1 dag, hur mycket på $\frac{1}{2}$ dag? Svar 2 gånger mindre $= \frac{2 \cdot 8{,}1}{2 \cdot 9}$ kr.; *så* mycket på $\frac{1}{2}$ dag, hur mycket på $\frac{33}{2}$ dagar. Svar: 33 gånger mera, alltså $\frac{33 \cdot 2 \cdot 8{,}1}{2 \cdot 9} = 29{,}7$ kr.

Man ser, hur regelräknandet triumferar. Lärjungarna *skola* först gå till enheten. Man skall följa regeln, ej använda sitt förstånd. — Självklart är, att frågan i stället borde ställas så: hur mycket förtjänar han på $\frac{1}{2}$ dag? Svar: $\frac{1}{9}$ av 8,1 kr. $= \frac{8{,}1}{9}$ kr. Hur mycket förtjänar han då på $\frac{33}{2}$ dagar? Svar: 33 gånger så mycket, alltså $\frac{33 \cdot 8{,}1}{9}$ kr.

Äro de givna storheterna däremot uttryckta i olika talsorter, kan man gå till den enkla enheten eller ock förvandla till en gemensam talsort och sedan använda denna som enhet. T. ex.:

$\frac{2}{3}$ cm.^{3} väger $\frac{7}{10}$ gr.
$\frac{4}{5}$ » » ? »

Här föreligger talsorterna tredjedelar och femtedelar. Det första tillvägagångssättet gestaltar sig så: Hur mycket väger $\frac{1}{3}$ cm.^{3}? Svar: hälften av $\frac{7}{10}$ gr., alltså $\frac{7}{2 \cdot 10}$ gr. Hur mycket så 1 cm.^{3}? Svar: 3 gånger så mycket, alltså $\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10}$ gr. Hur mycket väger så $\frac{1}{5}$ cm.^{3}? Svar: $\frac{1}{5}$ av det förra, alltså $\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 10}$ gr. Och hur mycket väger alltså $\frac{4}{5}$ cm.^{3}? Svar: 4 gånger så mycket, alltså $\frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 10}$ gr. $=$ 0,84 gr.

En visserligen något omständlig metod, men dock resonlig.

Det andra tillvägagångssättet är vigare. Vi förvandla tredjedelar och femtedelar till en gemensam talsort, alltså femtondelar. Således:

$\frac{10}{15}$ cm.^{3} väger $\frac{7}{10}$ gr.
$\frac{12}{15}$ » » ? »

Hur mycket väger $\frac{1}{15}$ cm.^{3}? Svar: $\frac{1}{10}$ av $\frac{7}{10}$ gr., alltså $\frac{7}{10 \cdot 10}$ gr.; och hur mycket $\frac{12}{15}$ cm.^{3}? Svar: 12 gånger så mycket, alltså $\frac{12 \cdot 7}{10 \cdot 10}$ gr. $=$ 0,84 gr.

b) »*Forhållandemetoden*».

Regula de tri problem kunna också lösas utan en sådan tillbakagång till enheten, som nu behandlats. Egentligen kan vilket tal som helst betraktas som enhet och räkningen hänföras till det. Nära till hands liggande och enkelt kan det ibland vara att betrakta den ena av de uppgivna storheterna som enhet och hänföra den andra därtill. T. ex.:

3 tjog kostar 5,25 kr.
18 » » ? »

Enklare än att här först räkna ut kostnaden av 1 tjog och så därav finna, vad 18 tjog kosta, är att beakta, att 18 tjog äro 6 gånger så mycket som 3 tjog och alltså också kosta 6 gånger så mycket, vilket blir 6 · 5,25 kr.

Vid denna räkning är det lämpligt att införa begreppet *förhållande*, vilket definieras så, att med förhållandet mellan två storheter, menas det tal, som angiver, hur många gånger den ena storheten innehåller den andra. Förhållandet mellan 18 och 3 angives alltså med talet 6, ty 18 innehåller 3 6 gånger. Barnen få alltså beakta, att förhållandet mellan det sökta priset och 5,25 kr. skall vara det samma som förhållandet mellan 18 tjog och 3 tjog.

Man inser genast, att denna »förhållandemetod» är användbar vid alla regula-de-tri-exempel. Det förut genomgångna problem:

$\frac{2}{3}$ cm.^{3} väger $\frac{7}{10}$ gr.
$\frac{4}{5}$ » » ? »

skulle med denna metod uträknas så: Det gäller att finna förhållandet mellan $\frac{4}{5}$ cm.^{3} och $\frac{2}{3}$ cm.^{3} Samma förhållande skall då råda mellan den sökta vikten och $\frac{7}{10}$ gr. Förhållandet mellan $\frac{4}{5}$ och $\frac{2}{3}$ finna vi genom att räkna efter, hur många gånger $\frac{4}{5}$ innehåller $\frac{2}{3}$, alltså $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{12}{15} : \frac{10}{15} = \frac{12}{10}$. Den sökta vikten skall alltså vara $\frac{12}{10}$ gånger så mycket som $\frac{7}{10}$ gr., alltså $\frac{12}{10} \cdot \frac{7}{10}$ gr. $= 0{,}84$ gr.

Vi anse dock, att vid sådana problem som detta den förut genomgångna metoden med tillbakagång till enheten är att föredraga såsom i det hela lättfattligare. Endast då förhållandet blir uttryckt med helt tal, är »förhållandemetoden» avgjort att föredraga. Särskilt för det fall, att »förhållandet» blir ett egentligt bråk, vilja vi avråda från användning av denna metod.

c) Problem med omvänd proportionalitet.

Man bör se till, att problem med omvänd proportionalitet ej alltför sparsamt förekomma instuckna mellan andra med direkt proportionalitet, så att all tendens till mekanisering av tankegången stoppas. Dessa tal lösas för övrigt ofta bekvämt utan tillbakagång till enheten. Exemplet:

10 man behöva 84 dagar för ett arbete
12 » » ? » » » »

kan ju lösas genom frågorna: hur lång tid skulle 1 man behöva? Svar: 10 gånger så lång tid, alltså 10 · 84 dagar. Hur lång tid 12 man, jämfört härmed? Svar: $\frac{1}{12}$ av denna tid, alltså $\frac{10 \cdot 84}{12}$.

Exemplet kan ock lösas så: hela arbetet kan taxeras till 10 · 84 dagsverken. 12 mans arbete under 1 dag är 12 dagsverken. Och vi kunna alltså finna ut, hur många dagar 12 man behöva arbeta, genom att se efter, hur många gånger 10 · 84 innehåller 12, alltså $\frac{10 \cdot 84}{12}$.

d) Sammansatt regula de tri.

Ett exempel:

3 kg. bröd åtgå på 6 dagar till 5 personer
? » » » » 15 » » 8 »

Ett vanligt lösningssätt är att först taga reda på, hur många kg. bröd som åtgå under 1 dag och så under 15 dagar till 5 personer, vilket ju blir $\frac{15 \cdot 3 \text{ kg.}}{6}$. Härefter tages reda på, hur mycket som åtgår till 1 person och så till 8, alltså $\frac{8 \cdot 15 \cdot 3 \text{ kg.}}{5 \cdot 6}$ $= 12$ kg.

Trevligare löses uppgiften genom att den delas upp i följande tvenne. Man tar först reda på, hur mycket bröd som åtgår *pr person och dag* eller hur stor *dagsransonen* är, och tar sedan reda på, hur mycket de efterfrågade dagsransonerna utgöra tillsammans. Till 5 personer under 6 dagar behövas tydligen $5 \cdot 6 = 30$ dagsransoner, vilket alltså är lika med 3 kg. En dagsranson alltså lika med 1 hg. Till 8 personer åtgå under 15 dagar $8 \cdot 15 = 120$ dagsransoner, vilket alltså blir lika med 120 hg. eller 12 kg. I praktiska livet torde ej så ofta båda dessa uppgifter vara kombinerade i samma problem, men till kravet att utesluta sammansatta regula de tri uppgifter ur undervisningen kunna vi dock icke ansluta oss.

e) Regula de tri metodens begränsning.

Regula de tri metoden bygger ju på att de i uppgiften förekommande storheterna äro proportionella.

En berömd författare har i ett arbete om bildning, just med tanke på regula de tri problemen, gentemot matematikundervisningen gjort den anmärkningen, att den negligerar verkligheten till förmån för tankekonstruktionen. Förf. skriver: — »eller man får i proportionsläran ett exempel som detta: om en man bygger en mur på 10 dagar, med 10 timmars arbetstid om dagen, så bygga 10 man den på en dag, 100 man på en timme. Och 6 000 man? På en minut blir då — det matematiskt riktiga — svaret. Men 6 000 man kunna icke bygga muren på en minut. Det levande livet har återigen slagit matematiken på fingrarna. Den ofelbara proportionsläran är ofelbar blott inom vissa gränser. Men lärjungen har ingen blick för det levande livet utan godkänner kritiklöst den matematiska 'sanningen', att 6 000 man bygga muren på en minut, medan en smula fantasi skulle säga honom, att de blott kunde stå i vägen för varandra!»

Nå, *så* illa är det nog ej ställt med barnens användande av sitt sunda förnuft. Men anmärkningen kan dock anses innehålla en berättigad kritik, icke av matematikens värde som bildningsmedel i skolan, men väl av mången undervisares sätt att handhava undervisningen i detta ämne. För övrigt är det missvisande att säga, att svaret »en minut» i det nämnda problemet *är »matematiskt riktigt»*. Om en person räknar ut ett problem genom att använda en räkneoperation, som icke bör användas vid det problemets lösning — t. ex. multiplicerar i stället för dividerar —, bör man ju ej säga, att hans lösning är »matematiskt riktig» blott därför, att han ej gjort något räknefel vid uträknandet av multiplikationen, och samma gäller, om han har använt proportionsläraus satser, fast de givna storheterna *ej voro* proportionella.

Barnen böra alltså lära sig, att — innan de använda regula de tri förfarandet — noga tänka efter, huruvida eller inom vilka gränser proportionalitet kan anses råda mellan de storheter, det i uppgiften är fråga om. Får jag t. ex. veta priset pr 100 st. av en vara och medelst regula de tri räknar ut priset på 5 enheter av varan, är det ju i många fall högst osäkert, om en affärsman är villig att rätta sitt pris efter en sådan uträkning. Beaktas denna sak, kommer tydligen i matematikundervisningen in ett moment av icke ringa allmänbildande betydelse.

Följande problem — som visserligen icke hör till de problem, som det praktiska livet ställer — må tjäna som ett ytterligare exempel på, att man måste tänka efter, om proportionalitet råder. 300 kronor har genom förräntning i en bank på 8 mån. vuxit till 312 kr. Hur mycket skulle då 500 kr. ha vuxit till under 9 månader? Ett tanklöst, mekaniskt sätt att räkna sammansatt regula de tri kan leda till följande uppställning och uträkning:

300 kr. — 8 mån. — 312 kr.
500 » — 9 » — ? »

Så frågas efter kapitalets storlek efter 1 mån. och efter 9 mån. och så efter det belopp, som 1 kr. och därefter 500 kr. skulle ha vuxit till, och svaret blir $\frac{500 \cdot 9 \cdot 312 \text{ kr.}}{300 \cdot 8}$

Problemet, uppställt och uträknat så, skulle kunna användas som ett skämtproblem. Förmodligen märka icke barnen, att resultatet är felaktigt, varpå läraren ändrar om och giver följande problem:

300 kr. — 8 mån. — 312 kr.
500 » — 2 » — ?

vilket uträknat på samma sätt blir:

$$\frac{500 \cdot 2 \cdot 312 \text{ kr.}}{300 \cdot 8} = 130 \text{ kr.}$$

Nu upptäckes, att man räknat fel. Och att även föregående problem tydligen räknats fel. Och så blir det tillfälle att klarlägga, hur felet uppkommit. Vi ha ju räknat, som om kapitalet växte proportionellt med tiden! Det gör *räntan*, men inte kapitalet. — Och så räknas problemet ut på ett förnuftigt sätt, genom att man beaktar, att räntan på 300 kr. på 8 mån. blir 12 kr., vilket möjliggör att räkna ut räntan på 500 kr. under 9 månader.

Exempel på lösning av en del särskilda problem.

§ 44. *a) Problemet att finna enheten, när ett visst antal av den är given.*

När antalet i fråga är ett blandat tal, behandlas problemet som en divisionsuppgift, alldeles som när antalet är ett helt tal. Problemet $2\frac{1}{3}$ kg. kostar 8,40 kr.; hur mycket kostar 1 kg.? löses alltså genom uppställningen: 8,40 kr. : $2\frac{1}{3}$, vilken division uträknas på sätt, som förut angivits.

Men när en *bråkdel av enheten är given och enheten efterfrågas,* anse vi, att barnen ej skola pressas att först uppskriva divisionsbeteckningen. Vid problemet $\frac{2}{3}$ kg. kostar 2,40 kr.; hur mycket kostar 1 kg., uppskrives alltså ej beteckningen 2,40 kr. : $\frac{2}{3}$, utan barnen resonera endast så: när $\frac{2}{3}$ kg. kostar 2,40 kr., hur mycket kostar då $\frac{1}{3}$ kg.? Svar: hälften så mycket, alltså $\frac{2,40 \text{ kr}}{2}$. Och hur mycket kostar så 1 kg.? Svar: 3 gånger så mycket, alltså $\frac{3 \cdot 2,40}{2}$ kr.

b) Problemet att finna en viss bråkdel av enheten, när en annan bråkdel är given.

Vi ha redan vid behandlingen av regula de tri metoden visat, hur ett sådant problem lämpligen kan behandlas. Följande tvenne lösningsmetoder angåvos.

Exempel: $\frac{2}{3}$ kg. kostar 2,40 kr. Hur mycket kostar $\frac{3}{4}$ kg.?

Lösningsmetod 1. 1 kg. kostar $\frac{3 \cdot 2,40 \text{ kr.}}{2}$. $\frac{3}{4}$ skall kosta $\frac{3}{4}$ av detta, alltså $\frac{3 \cdot 3 \cdot 2,40 \text{ kr.}}{4 \cdot 2} = 2,70$ kr.

Lösningsmetod 2. $\frac{2}{3}$ kg. $= \frac{8}{12}$ kg.; $\frac{3}{4}$ kg. $= \frac{9}{12}$ kg., alltså:

$\frac{8}{12}$ kg. kostar 2,40 kr.
$\frac{9}{12}$ » » ? »,

varpå man finner, hur mycket $\frac{1}{12}$ kg. och sedan $\frac{9}{12}$, kg. kostar, alltså:

$$\frac{9 \cdot 2,40 \text{ kr.}}{8} = 2,70 \text{ kr.}$$

§ 45. Procentproblem, särskilt ränteproblem.

Procent synes oss i första hand böra definieras som hundradel. Och liksom barnen få räkna ut, hur mycket $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ etc. av ett tal är, få de räkna ut, hur mycket $\frac{5}{100}$, $\frac{[illegible]}{100}$ etc. av olika tal är. Och så få de upplysningen, att hundradel ofta kallas procent och tecknas %.

a) Beräkning av räntan.

Sedan begreppen ränta och kapital klargjorts, få barnen veta, att årliga räntan ofta brukar angivas i hundradelar, alltså %, av kapitalet. Har man satt in i en bank 750 kronor och banken ger 4 %. betyder det, att *den årliga räntan* utgör 4 hundradelar av 750 kronor,

$$\frac{4}{100} \text{ av } 750 \text{ kr. eller } \frac{4}{100} \cdot 750 \text{ kr. eller } \frac{4 \cdot 750 \text{ kr.}}{100}.$$

Sysslar man något med procentuppgifter redan i klass 5, innan multiplikation med bråkmultiplikator genomgåtts, nöjer man sig med beteckningen $\frac{4}{100}$ av 750 kr. Uträkningen sker i allmänhet så, att först tages 1 hundradel av kapitalet och sedan multipliceras med procenttalet, alltså $4 \cdot 7{,}50$ kr. $=$ 30 kr.

Procent brukar ju även definieras som »på hundra», t. ex. 4 på hundra; och även med detta sätt att tänka böra barnen bli förtrogna. $\frac{4}{100}$ av 100 är ju $= 4$. På 100 kr. blir det alltså 4 kr. i ränta, och på 1 kr. blir det 4 öre, etc. Men det är klokt att först göra barnen väl förtrogna med uppfattningen procent $=$ hundradel, innan man går in på denna nya tankegång.

Vid ränteberäkningar böra inga formler givas. Ej heller bör något regula de tri schema uppställas. Att giva en formel som $r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$ eller $r = \frac{k \cdot p \cdot d}{36\,000}$ är *absolut förkastligt.*

Barnen tillämpa snart formeln helt mekaniskt, och när så formeln snart nog är glömd, är resultatet av hela undervisningen lika med noll. Först genom att barnen vid lösningen av ränteproblemen få löpa igenom tankegången, lära de sig ordentligt behärska metoden. Regula de tri schemat åter är en fullkomligt onödig barlast, som det endast tar tid att skriva upp.

Sedan barnen övats att beräkna den årliga räntan, få de syssla med problem, i vilka räntan skall beräknas på annan tid. Först beräknas eller betecknas *den årliga räntan*, och sedan tages den bråkdel av den, som erfordras. Vid t. ex. beräkning av räntan under 7 månader à 850 kr. efter 5 % resoneras så:

Räntan under ett år är $\frac{5 \cdot 850 \text{ kr.}}{100}$,

under 1 mån. alltså $\frac{1}{12}$ härav och under 7 mån. 7 ggr så mycket, alltså $\frac{7 \cdot 5 \cdot 850 \text{ kr.}}{12 \cdot 100}$ och analogt vid beräkning av räntan på ett visst antal dagar.

Då procenttalet är ett bråk, bereder ej heller detta någon svårighet, sedan barnen lärt multiplikation med bråk. $4\frac{1}{2}$ % av 850 kr. kan ju beräknas så: $4\frac{1}{2} \cdot \frac{850 \text{ kr.}}{100} = \frac{4{,}5 \cdot 850 \text{ kr.}}{100}$. Eller ock beaktas, att $4\frac{1}{2}$ hundradel är $\frac{9}{200}$; $4\frac{1}{2}$ % av 850 kr. kan alltså uträknas som $\frac{9}{200}$ av $850 = \frac{9 \cdot 850}{200}$.

Vid procentberäkningar är det ibland praktiskt att utbyta hundradelarna mot större bråksorter. Barnen böra veta, att 50 % = $\frac{1}{2}$, 25 % = $\frac{1}{4}$, 75 % = $\frac{3}{4}$, 20 % = $\frac{1}{5}$, 10 % = $\frac{1}{10}$, 5 % = $\frac{1}{20}$, 4 % = $\frac{1}{25}$, 2 % = [illegible]

b) Beräkning av procenten.

Det gäller att taga reda på, vilken procent ett tal är av ett annat tal. Vid ränteproblem är det frågan om att finna vilken % den årliga räntan är av kapitalet. T. ex.

750 kr. ger en årlig ränta av 40,25 kr. Hur stor är procenten?

Flera lösningsmetoder kunna ju komma i fråga. Vi kunna beakta, att 750 kr. är 100 % av 750 kr., och teckna

100 % av kapitalet är 750 kr.
? » » » » 40,25 kr.,

och resonera sedan på ettdera av följande båda sätt.

1) 1 % av kapitalet är 7,50 kr. Vi kunna finna, hur många % 40,25 kr. är, genom att se efter, hur många gånger 7,50 kr. innehålles i 40,25 kr., alltså 40,25 kr. : 7,50 kr. = 5,5. Svar: 5,5 %.

2) Då 750 kr. är 100 %, är 1 kr. $\frac{100}{750}$ %, och 40,25 kr. är 40,25 ggr så mycket, alltså $\frac{40{,}25 \cdot 100}{750}$ % = 5,5 %.

Metod 1 är svårfattlig för det mera sällsynta fallet, att procenten är mindre än 1 (leder till innehållsdivision med ett egentligt bråk till kvot), i andra fall utmärkt. *Metod 2* synes oss ej fullt så naturlig som metod 1, men bereder till gengäld inga särskilda svårigheter för det fall, att procenten är mindre än 1.

En tredje lösningsmetod är följande:

750 kr. ger 40,25 kr.
100 » » ? »

1 kr. ger [illegible] kr., och 100 kr. ger $\frac{100 \cdot 40{,}25}{750}$ kr. i ränta.

Så ha vi vid ränteräkning det fall, att räntan är angiven för annan tid än ett år, medan räntefoten efterfrågas. Man tar i så fall helt naturligt först reda på motsvarande årliga ränta, varpå procenten beräknas så, som ovan visats. T. ex. 800 kr. har på 9 mån. givit 30 kr. i ränta. Hur stor är räntefoten? Först beräknas motsvarande årliga ränta. Hur stor är räntan på 1 mån.? Svar: $\frac{1}{9}$ av 30 kr. Hur stor är alltså räntan på 12 mån?

Svar: 12 ggr så mycket, alltså $\frac{12 \cdot 30 \text{ kr}}{9}$, varpå denna årliga ränta uträknas och befinnes vara 40 kr. Alltså:

100 % är 800 kr.
? » » 40 »

1 % är 8 kr. 40 kr. : 8 kr. = 5. Svaret blir alltså, att räntefoten är 5 %.

c) Kapitalet efterfrågas.

Ett kapital är utlånat efter 6 % och ger i årlig ränta 39 kr. Hur stort är kapitalet? Den naturligaste lösningen blir att först taga reda på, vad 1 % av kapitalet är. Då 6 % av kapitalet är 39 kr., är 1 % tydligen $\frac{39 \text{ kr.}}{6}$ och hela kapitalet, alltså 100 %, tydligen $\frac{100 \cdot 39 \text{ kr.}}{6} = 650$ kr.

Ännu enklare gestaltar sig uträkningen av sådana tal, när den angivna procenten kan förkortas till ett stambråk, t. ex. 5 % $= \frac{1}{20}$. Vore den årliga räntan efter 5 % 39 kr., skulle alltså kapitalet vara 20 · 39 kr. = 780 kr.

Är räntan angiven för någon annan tidpunkt än ett år, beräknas först den årliga räntan, varefter förfares, som visats. T. ex. Räntan å ett kapital uppgick för 5 mån. till 27,5 kr. Räntefoten var 5,5 %. Vilket var kapitalet? Först beräknas alltså den årliga räntan, som blir $\frac{12 \cdot 27{,}5}{5} = 66$ kr.

5,5 % av kapitalet är 66 kr.
100 » » » » ? »

1 % är $\frac{66 \text{ kr.}}{5{,}5}$ och 100 % är $\frac{100 \cdot 66 \text{ kr.}}{5{,}5} = 1\,200$ kr. Svar: 1 200 kronor.

d) Tiden efterfrågas.

Ex. På hur lång tid växer 540 kr. efter 3,5 % ränta till 549,45 kr.? — Räntan beräknas och jämföres med den årliga räntan. Räntan utgör 9,45 kr. Den årliga räntan är $\frac{3{,}5 \cdot 540 \text{ kr.}}{100} = 18{,}9$ kr. Man ser genast, att den uppgivna räntan är hälften av den årliga. Tiden är alltså $\frac{1}{2}$ år.

Ex. Hur lång tid åtgår, för att räntan på 1 500 kr. efter

4,5 % skall uppgå till 8,44 kr.? Den årliga räntan utgör $\frac{4,5 \cdot 1\,500 \text{ kr.}}{100} = 67,5$ kr.

1) För att bestämma, på hur många dagar räntan uppgår till 8,44 kr., kunna vi först räkna ut, hur stor räntan är på 1 dag, alltså $\frac{67,5 \text{ kr.}}{360} = 0,1875$ kr., varpå antalet dagar finnes genom att man ser efter, hur många ggr 8,44 kr. innehåller 0,1875 kr., alltså

$$8,44 : 0,1875 = 45,0.$$

Svar: 45 dagar. Obs.! Använder man vid denna uträkning ett approximativt värde på räntan på 1 dag, måste man tänka efter, i vad mån slutresultatet påverkas därav.

2) Man kan ock resonera på följande sätt:

På 360 dagar blir räntan 67,5 kr.
» ? » » » 8,44 »

Man frågar först, på hur många dagar räntan blir 1 kr., och sedan, på hur många dagar den blir 8,44 kr., alltså $\frac{8,44 \cdot 360 \text{ d.}}{67,5} = 45,0$.

Svar: 45 dagar.

Vi se, hur enkelt alla dessa problem låta beräkna sig. Det torde ock inses, hur mycket värdefullare ett sådant sysslande med problemen är än ett inlärande och tillämpande av en hel rad formler för uträknande av ränta, procent, tid och kapital. Ekvationsmetoden för lösande av dessa problem är visserligen god, men ifrågavarande problem äro dock ej svårare, än att de utan möda väl kunna lösas den förutan. — I folkskolan behöver man ej genomgå alla typerna. De praktiskt viktigaste äro de båda första, uträknandet av räntan och procenten. Minst viktig är den fjärde, uträknande av tiden, och den kan mycket väl förbigås.

§ 46. Ytterligare några procentproblem.

a) Problem angående rabatt och provision, vinst och förlust erbjuda endast någon svårighet vid exempel av typen: En person sålde varor för 800 kr. och förtjänade därvid 25 %. Hur mycket hade han själv betalt för varorna? Man får naturligtvis ej beräkna 25 % av 800 kr. och draga det ifrån 800 kr., ty vinsten är 25 % av *inköpspriset*, ej av försäljningssumman. Vid detta och liknande problem tillämpas enklast följande metod. När vinsten är 25 % av inköpssumman, betyder det, att försäljningssumman är 125 % av inköpssumman. Alltså

125 % av inköpssumman är 800 kr.
100 » » » » ? »

1 % av inköpssumman blir då? Och 100 %?

Svar: $\frac{100 \cdot 800 \text{ kr.}}{125}$.

b) Växelproblem. Aktier och obligationer.

Vi anse att växelproblem ej böra förekomma i den vanliga sexklassiga folkskolan. I folkskolans sjunde klass och i fortsättningsskolan torde de däremot vara lämpliga.

Endast problem, i vilka det gäller beräkning av en växels diskonterade värde, synas oss böra förekomma. Således ej beräkning av räntefoten eller växelbeloppet eller förfallodagen. I praktiska livet förekommer ofta omsättning av växlar. Problem angående sådana affärstransaktioner bruka märkligt nog aldrig påträffas i räkneböckerna, vilka däremot ofta innehålla räkneuppgifter av ett slag, som sällan eller aldrig förekomma i det praktiska livet.

Problem angående aktier synas också böra förekomma först i sjunde klassen eller i fortsättningsskolan. Endast de enklaste och praktiskt betydelsefullaste av dessa räkneuppgifter böra behandlas. — Kunna barnen räkna vanliga procent- och ränteproblem, erbjuda problemen om växlar, aktier och obligationer dem visserligen inga rent matematiska svårigheter, men dessa uppgifter äro dock svåra för barnen, emedan de skola förvärva kunskap om ganska invecklade sakförhållanden å områden, som ligga helt utanför deras erfarenhet.

c) Problem angående sammansatt ränta.

Uppgifter angående sammansatt ränta anse vi vara så pass betydelsefulla, att de böra behandlas redan i folkskolans sjätte klass (i den vanliga sexklassiga skolan). Den tid, som i fortsättningsskolan kan anslås till räkneundervisningen, blir ju mycket obetydlig, och man bör därför ej utan vägande skäl skjuta över dit stoff, som kan behandlas i den egentliga folkskolan. Vid nu ifrågavarande uppgifter gäller det ej, såsom vid växlar och obligationer, att införa barnen på ett nytt komplicerat sakområde, utan man rör sig på ett för barnen från de vanliga ränteproblemen välbekant område. De rent matematiska svårigheterna äro i fråga om de enkla uppgifter, det här bör gälla, ej heller betydande. Barnen skola lära att förstå sig på *en tabell, angivande det belopp, 1 kr. växer till under ett visst antal år efter viss procent.* Förståelsen av tabellen bör underlättas genom att barnen själva få beräkna några av uppgifterna i den, t. ex. hur mycket 1 kr. växer till efter 5 % på 1 år, 2 år, 3 år. Följande problemslag behandlas. 1) Vad en viss summa växer till på ett visst antal år. 2) Hur stor summa, man behöver insätta i en bank för att efter en viss tid äga viss summa. 3) Vad en viss *årlig* insättning kommer att belöpa sig till efter ett visst antal år. 4) Hur stor *årlig* insättning behövs för att man efter ett visst antal år skall äga en viss summa.

För lösande av de båda sista uppgifterna är det ju bra, om barnen också äga en tabell, angivande värdet av en årlig insättning av 1 kr. efter visst antal år. I annat fall böra de få uträkna dessa uppgifter med användande av första tabellen, vilket ju mycket väl låter sig göra genom addition av de där förekommande talen. T. ex. Hur stor summa skall vid varje års slut insättas i en bank, för att efter 10 år ett belopp av 3 000 kr. skall innestå i banken, om räntan vid varje års slut läggcs till kapitalet? Om vi beräkna 4 %, finna vi att en årlig besparing av 1 kr. under 10 år ger oss en behållning av 1,42331 + 1,36857 + etc. · · · · + 1,04 + 1 = 12,0061. Den första summan anger det belopp, som 1 kr. växer till under 9 år, ty den summa, som insättes vid första årets slut, har vid tionde årets slut förräntats under 9 år. Då en årlig insättning av 1 kr. blir till 12,0061 kr., inses, att man för att finna, hur stor summa som årligen skall insättas, får se efter, hur många ggr 12,0061 kr. innehålles i 3 000 kr.

§ 47. Diverse problem.

a) Fördelningsproblem.

Ex. Vid en gemensam affär tillsköt A. 500 kr., B. 400 kr., C. 300 kr.; affären inbragte en vinst av 126 kr.; hur mycket av vinsten tillkom var och en? På 1 200 kr. har det blivit en vinst av 126 kr. Hur mycket alltså på 500 kr.? Uträknas genom att man först frågar efter vinsten på 1 hundra kronor och så på 5 hundra, alltså

$$\frac{[illegible]\text{ kr.}}{2} = 52{,}5 \text{ kr. } (= \text{A:s andel}).$$

etc.

b) Blandningsproblem.

Ex. Hur mycket vatten skall sättas till 500 gr. $2^1/_2$ % saltlösning, för att lösningen må bli $1^1/_2$ procentig?

Mängden salt i lösningen beräknas först, alltså

1) $\frac{2{,}5 \cdot 500 \text{ gr.}}{100} = 12{,}5$ gr. salt.

2) den $1^1/_2$ procentiga lösningens vikt bestämmes:

12,5 gr. är 1,5 % av lösningens vikt
? » » 100 » » » »

1 % är $\frac{12{,}5 \text{ gr.}}{1{,}5}$. 100 % alltså $\frac{100 \cdot 12{,}5 \text{ gr.}}{1{,}5} = 833\frac{1}{3}$ gr.

3) Och så finnes den mängd vatten, som skall tillsättas: $833\frac{1}{3}$ gr. — 500 gr. $= 333\frac{1}{3}$ gr.

Ex. Hur många kg. kaffe à 3 kr. skola blandas med 37,5 kg. à 2 kr., för att medelpriset skall bliva 2,25 kr.?

Ett så svårt problem hör ej till dem, som barnen skola övas att lösa. Vi tänka oss endast problemet mera tillfälligt givet som en tankeövningsuppgift, lämplig för de mera skarpsinniga av barnen. Den naturligaste tankegången för lösningen synes vara att börja med undersökningar beträffande en blandning av 1 kg. av vardera sorten. Medelpriset av en sådan blandning överskjuter priset 2 kr. med hälften av 1 kr. (då 1 kr. så att säga fördelas på 2 kg.). Skall man få ett överskott av $^1/_4$ kr., skall 1 kr. fördelas på 4 kg. Vi skola alltså taga 1 kg. av 3-kronors kaffet på 3 kg. av 2 kronors. Ha vi 37,5 kg. av 2-kronors kaffet, skola vi alltså taga så många kg. av 3-kronors kaffet, som 3 kg. innehållas i 37,5 kg., alltså *12,5 kg.*

c) *Arbetsproblem.*

Ex. Ett kärl kan fyllas medelst ett rör ensamt på 2 timmar och medelst ett annat ensamt på 3 timmar. Hur lång tid åtgår för kärlets fyllande, om båda rören samtidigt öppnas? — Vi tänka efter, hur stor del av kärlet som fylles, om båda rören stå öppna 1 timme. Det ena fyller hälften av kärlet, det andra en tredjedel, tillsammans alltså $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Alltså

på 1 timme fylles $\frac{5}{6}$ av kärlet
» ? » » $\frac{6}{6}$ » »

$$\frac{6 \cdot 1 \text{ tim.}}{5} = 1 \text{ tim. } 12 \text{ min.}$$

d) *Ekvationslösning.*

Talproblem kunna vara både intressanta och tankeövande och böra ej försummas. Till denna grupp hör ock *ekvationslösning.* Vi anse, att man i folkskolan skall syssla med lösandet av enklare ekvationer. Det är brukligt, att låta barnen i småskolan lösa ekvationer, t. ex. $3 + ? = 8$, och det finnes ingen anledning att upphöra därmed i de högre klasserna. En annan sak är frågan, om barnen skola övas att lösa tillämpningsuppgifter genom ekvationsuppställning med åtföljande ekvationslösning. Vi tro ej, att det är praktiskt att i den sexklassiga folkskolan öva barnen därmed. Vid något enstaka tillfälle kan man — om man så önskar — visa barnen, hur ett problem kan lösas genom ekvationsuppställning, men någon övning häri bör icke ifrågakomma. De uppgifter, som i folkskolan föreläggas till lösning, böra i allmänhet ej vara svårare, än att de behändigt kunna lösas utan användande av ekvationsmetoden. För att barnen skulle ha någon nytta av sådan övning, skulle den behöva drivas i en helt annan omfattning och med användande av mycket mera tid, än som kan vara rimligt, åtminstone i den sexklassiga folkskolan. I undervisningsplanen antydes i kursplanen för den sjuklassiga skolan, att i dess högsta klass enkla ekvationer skulle kunna komma till användning. Det heter: »procent- och ränteuppgifter, med användning, där så finnes ändamålsenligt, jämväl av enkla ekvationer». Särskilt om man i de föregående klasserna — såsom av oss föreslagits — sysslat en del med ekvationslösning, torde i sjunde klassen de nämnda problemslagen utan större svårighet kunna behandlas med hjälp av ekvationsmetoden. Vi ha emellertid i det föregående visat, att dessa problem på enkelt sätt låta sig behandlas utan ekvationsuppställning, och att man således ej på grund av dessa problems svårighet behöver tillgripa denna metod. Men ekvationsmetoden är dock vida att föredraga framför en behandling av dessa problem med inlärande och användande av olika formler, allteftersom räntan, procenten, kapitalet eller tiden efterfrågas.

De ekvationstyper, man i småskolan brukar syssla med, och som man bör fortsätta med i folkskolan, äro följande:

1) $a + x = b$ eller $x + a = b$, 2) $x - a = b$, 3) $a - x = b$, 4) $x \cdot a = b$ eller $a \cdot x = b$, 5) $x : a = b$, 6) $a : x = b$, där a och b beteckna kända tal.

I småskolan ha a och b utgjorts av små hela tal, t. ex. $x \cdot 8 = 56$ (typen $x \cdot a = b$).

Det efterfrågade talet (det obekanta) torde vid ekvationslösningen i småskolan oftare betecknas med? än med x. Detta är ju ingen skillnad i sak, och naturligtvis är $? \cdot 8 = 56$ en ekvation lika väl som $x \cdot 8 = 56$. Vi anse, att tecknet x bör användas vid ekvationslösningen.

Å folkskolestadiet kunna så småningom a och b beteckna vilka tal som helst, hela tal eller bråktal. T. ex. $3{,}5 \cdot x = 28{,}84$, som naturligtvis löses genom division, eller $\frac{3}{4} \cdot x = 1\frac{1}{8}$, som löses, på sätt förut visats, alltså så: $\frac{1}{4}$ av det obekanta talet är $\frac{9}{3 \cdot 8}$, och hela detta tal alltså $\frac{9}{8}$.

Ekvationerna skola alltså lösas genom samma enkla resonemang, som barnen bruka använda för lösande av dessa uppgifter, när de ej äro uppställda i form av ekvationer. Man skall ej lära in någon säregen metod för ekvationslösning, såsom att uttrycken på båda sidor om likhetstecknet kunna multipliceras och divideras etc. med samma tal.

Utom de ovan nämnda typerna torde man mera tillfälligt kunna såsom *talproblem* giva något mera komplicerade ekvationer. Det är således ej fråga om att *inöva* lösandet av ekvationer av dessa typer. Det gäller blott att giva barnen lämplig tankeövning.

Vi giva några exempel: $\frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x = 45$. Barnen få i ord formulera problemet: Hur stort är det tal, vars hälft tillsammans med dess tredjedel utgör 45? Det är mycket möjligt, att några av barnen klara det utan hjälp. I annat fall kan läraren fråga, hur stor del av talet $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ tillsammans är. Och sedan man konstaterat, att det är $\frac{5}{6}$ av talet, finner man ju detta genom det sedvanliga resonemanget: $\frac{1}{6}$ av talet är 9, och hela talet alltså $6 \cdot 9 = 54$. Ett annat exempel $\frac{x}{2} - 7 = 18$. Genom jämförelse med t. ex. $9 - 3 = 6$, där 3 och 6 äro »delarna», som tillsamman bli lika med »det hela», 9, inse barnen, att 7 och 18 tillsamman böra bli lika med halva det sökta talet. Detta blir alltså $2 \cdot 25 = 50$.

Även andragradsekvationer kunna givas (för övrigt redan i småskolan) t. ex. $x \cdot x = 16$, eller $x \cdot x + 1 = 50$. Sådana talproblem äro uppenbarligen ej för svåra. Sysslandet med de nämnda ekvationstyperna är av en viss betydelse i fråga om inlärande av räkneoperationernas betydelse. Liksom uppgiften $8 \cdot x$ cm. $= 56$ cm., med lösningen $x = 7$, i småskolan är av betydelse vid inlärande av multiplikations- och divisionsbegreppet, så gäller detsamma i folkskolan. Den betydelse detta sysslande med ekvationer i folkskolan har för den, som kommer att fortsätta sina matematiska studier, kan också förtjäna att framhållas.

FEMTE AVDELNINGEN.

Kursen i geometri.

§ 48. **Allmänna frågor beträffande geometrikursen i folkskolan. Lärogången.**

I nu gällande undervisningsplan finnes ej för geometriundervisningen särskild tid anslagen, utan ämnet skall behandlas å den för räkning och geometri gemensamt upptagna tiden.

Om denna sak säges i undervisningsplanens metodiska anvisningar mycket riktigt följande: — »det torde icke vara lämpligt, att regelbundet för geometriundervisningen använda exempelvis en lärotimme varje vecka under hela läsåret, utan mera ändamålsenligt är, då ett geometriskt moment skall behandlas, för detta använda ett större antal veckotimmar under en kortare tid och sedan låta geometriska exempel ingå bland de vid räkneundervisningen i allmänhet förekommande tillämpningsövningarna».

Undervisningens allmänna mål angives vara att bibringa lärjungarna »någon förtrogenhet med geometriska storheters uppritning, beskrivning, mätning och beräkning».

Värdet av den kunskap, som genom folkskolans geometrikurs bibringas barnen, måste skattas högt både med hänsyn till kunskapens rent praktiska betydelse för envar i det dagliga livet och med hänsyn till att vissa elementära kunskaper i geometri utgöra en oumbärlig grundval för fortsatta studier i flera ämnen, vilka studier annars, om de skola drivas på egen hand, lätt nog kunna komma att misslyckas. Vidare bör ock beaktas, att själva uppövandet av förmågan av rumsåskådning är en sak av betydande värde. — Men ett gott resultat är naturligtvis som alltid beroende av hur undervisningen bedrives. Ett inpluggande av abstrakta lärosatser är — om ingen klar åskådning ligger bakom — värdelöst. Vad värde kan det ligga i att barnen veta, att en triangels storlek finnes genom multiplikation av basen med halva höjden, och om de kunna uträkna sådana exempel i läroboken, där basens och höjdens längder finnas angivna, om de samtidigt stå alldeles rådlösa inför uppgiften att taga reda på storleken av en i verkligheten given triangels yta? Läraren måste oavbrutet ha sin uppmärksamhet riktad på att barnen tänka åskådligt och ej blott följa en formel.

Av betydelse är, att barnen ej överhopas med inlärande av en mångfald geometriska lärosatser, utan att kursen i så stor utsträckning som möjligt gestaltas som en tillämpning på olika fall av helt få grundläggande lärosatser.

Man bör också iakttaga sparsamhet i fråga om inlärande av namn på de geometriska storheterna. Naturligtvis skola barnen lära in allmänt kända termer men icke sådana, som endast »specialister» känna till, såsom »apotem» och åtskilliga andra, som ibland förekomma i läroböckerna.

Kursens omfattning finnes angiven i undervisningsplanen. De olika kursmomenten torde kunna tagas i den ordning, i vilken de här nedan följa. Till de olika kursmomenten foga vi en del randanmärkningar.

§ 49. **Fjärde klassens kurs.**

a) *De geometriska grundbegreppen.*

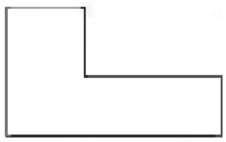
Begreppen yta, linje, punkt skola barnen ej lära in genom några abstrakta definitioner, utan kunskapen förvärvas genom att barnen få å olika kroppar räkna antalet sido*ytor*, kant*linjer*, hörn*punkter*. Härunder lära de ock känna begreppen räta och krokiga linjer, plana och buktiga ytor. Vid dessa övningar kunna barnen få lära namnen på en del vanliga geometriska kroppar och ytor, såsom rät pelare, pyramid, kon, klot, cylinder, rektangel, kvadrat, triangel, mångsiding, cirkel. Några definitioner givas ej, utan man nöjer sig tills vidare med den uppfattning, som barnen kunnat få genom åskådningen, och med att barnen riktigt kunna namngiva de olika kropparna och ytorna.

b) *Om längdmått och längdmätning.*

Med längdmätning ha ju barnen sysslat redan i småskolan, men de behöva alltjämt övas därmed. Av längdmåttens storlek skola barnen kunna göra sig en ungefärlig föreställning. Bedömning av längder med ögonmått är en intressant och nyttig övning. Barnen kunna få bedöma längden av olika linjer, som äro uppritade på tavlan, och därpå genom mätning taga reda på, vem som »gissat» bäst. De kunna få efter ögonmått upprita linjer av uppgiven längd och genom kontrollmätning finna, hur bra de lyckats. I fråga om de större måtten (km. och mil) böra barnen få lära, att avstånden mellan vissa kända platser i trakten äro ungefär av den längden. Vid längdmätningarna bör man ej försumma, att låta barnen mäta olika figurers omkrets, varigenom begreppet en figurs omkrets klargöres. Dessa mätningar kunna även gälla krokliniga figurers omkrets (t. ex. cirkelns). Hur cirkelns omkrets kan beräknas ur diameterns längd, sysslar man dock ej med här. — Mätningar ute böra även förekomma. Att genom *stegning* finna en längd böra barnen övas i. — Uträkning av längder efter mätning å kartor och ritningar i *viss skala* utföres ock. Barnen få också själva rita figurer i viss skala. — *De gamla måtten* böra ej alldeles lämnas ur räkningen i de högsta klasserna, men det ställes mycket litet av minnesfordringar beträffande dem. Att 1 aln = 2 fot = 6 dm., och 1 tum = 25 mm., synes dock böra läras. — Läraren kan gärna för barnen berätta litet ur *längdmåttens historia*.

c) *Om ytmått och ytmätning. Beräkning av rektangelns och kvadratens yta.*

Barnen böra ej blott höra talas om att ytmått användas för ytmätning utan ock i verkligheten företaga sådan mätning. Få de alltifrån början endast *beräkna* ytornas storlek, sedan de utfört för beräkningen nödvändiga längdmätningar, blir talet om att ytor mätas med ytmått ofta blott ett tomt tal. Barnen kunna i sina anteckningsböcker rita rektanglar och sedan mäta dem genom att lägga på ytmått i form av kvadratiska papperslappar med sida = 1 cm. Ytor på tavlan (rektangulära eller sådana, som lätt kunna uppdelas i rektanglar), t. ex.



mätas med hjälp av en kvadratisk pappersskiva med 1 dm:s sida.

Barnen ha benägenhet att förväxla en figurs omkrets och yta, så att de tro sig bestämma ytan, när de mäta omkretsen. Lämpligast är att jämsides med ytmätningen (medelst ytmått) mäta omkretsen (medelst längdmått). Man bör naturligtvis ej blott syssla med ritade figurer utan även mäta andra ytor, såsom pappersark, bordskivor etc. Vi tro, att den tid, som användes till dessa ytmätningar medelst ytmått, är väl använd, och att därigenom tid sedan sparas, i det att barnen lättare lära sig kursens innehåll i fråga om ytberäkningar.

Sedan barnen blivit förtrogna med dessa ytmätningar, tar man upp frågan, om vi ej på enklare sätt skulle kunna finna en rektangelytas storlek. Svaret blir, att vi ej i verkligheten behöva utföra ytmätningen utan kunna tänka oss till hur många ytmått en rektangelyta innehåller, om vi blott mäta rektangelns längd och bredd, vilken mätning ju är betydligt enklare att utföra än ytmätningen. Genom längden få vi veta, hur många ytmått vi kunna lägga i en rad längs ena sidan, och genom bredden få vi veta, hur många sådana rader det blir på hela ytan. Detta åskådliga tänkande få barnen nu använda, och läraren bör ej påskynda ett abstrakt »minnestänkande» genom att låta barnen inlära satsen, att rektangelns yta erhålles genom multiplikation av längden och bredden (eller att yt-talet fås genom multiplikation av längdtalet och breddtalet, som det mera logiskt bör heta). Sedan läraren märkt, att barnen börjat multiplicera längdtal med breddtal utan att vidare tänka över, vad dessa tal innebära, bör han låta dem allt emellanåt redogöra för tankegången. — Kvadratens yta beräknas naturligtvis på samma sätt. I samband med dessa beräkningar inläras ytmåttens förhållande till varandra. — Med hänsyn till de större ytmåttens åskådliggörande må anmärkas, att det är lämpligt att låta barnen utstaka en yta lika med 1 ar.

I tillämpningsuppgifterna bör den planimetriska beräkningen ofta blott vara en detalj, som man först måste utföra för att kunna finna problemets lösning. Men man bör även taga med ett ej ringa antal mera formella övningsuppgifter, i vilka ytberäkningen är huvudsak. Dessa uppgifter böra dock ej väsentligen bestå i beräkning av en rektangels yta ur uppgiven längd och bredd utan vara av ett mera varierande och intresseväckande slag. — Några exempel. Det kan gälla, att medelst ögonmått jämföra rektangelytor och angiva, vilken som är störst, eller att medelst ögonmått uppskatta en ytas storlek med efterföljande mätning och uträkning. Barnen kunna få göra jämförelser i fråga om olika rektanglars omkrets och yta och upprita olika rektanglar med samma omkrets och sedan beräkna deras ytor. De kunna också få till uppgift att rita rektanglar av uppgiven ytstorlek.

Även de omvända problemen, i vilka det gäller att ur ytans storlek och ena sidans längd finna den andra sidans längd, böra givas, då de äro av viss praktisk betydelse.

Sedan barnen i klass 5 och 6 lärt sig räkna med bråktal, få de också lära sig beräkna rektangelytor, i vilka basens och höjdens mätetal äro bråktal. Förklaringen bereder ej några svårigheter, sedan barnen i bråkläran lärt sig förstå innebörden av en multiplikation med bråkmultiplikator.

I dessa klasser kan ock något sysslas med förvandling mellan gamla och nya ytmått.

d) Om rymdmått och rymdmätning. Beräkning av rymden hos en rät pelare med rektangulär eller kvadratisk basyta.

Med rymdmåtten deciliter och liter äro barnen förtrogna redan från småskolan. De skola nu få lära att mäta rymder med användande av kuber. Lämpligt är, att detta arbete kombineras med *arbetsövningar*, vid vilka barnen få av tjockt papper tillverka små askar av uppgiven längd, bredd och höjd, vilka de sedan få mäta genom att fylla dem med kuber av storleken 1 cm^3. Så övergår man till frågan, hur man enklare kan taga reda på rymdinnehållet och finner, att man endast behöver mäta längd, bredd och höjd, och att man sedan kan *tänka sig till* hur många $cm.^3$ asken innehåller. Man tänker nämligen efter, hur många kuber som kunna läggas i bottenlagret, och hur många sådana lager som kunna få rum i asken. Här gäller, att man skall söka någon tid hålla barnen kvar vid detta åskådliga tänkande och ej påskynda övergången till minnestänkandet: längden · bredden · höjden. Man bör ock beakta den betydelse, detta åskådliga tänkande har för uppövandet av barnens förmåga av rymdåskådning. Stor betydelse för uppövande av denna ha också arbetsövningar av förut nämnt slag. Barnen böra få rita ytnät till olika rätvinkliga pelare och sedan tillverka pelarna genom vikning och hopklistring.

I samband med beräkning av kubers rymd få barnen uträkna förhållandet mellan de olika rymdmåtten. — De stora måtten kbkm. och kbmil kunna åskådliggöras på ett trevligt sätt genom att barnen få göra uträkningar av allt, som skulle kunna rymmas i sådana volymer. — Liksom i fråga om ytberäkningar böra barnen, sedan de i bråkläran lärt multiplikation med bråkmultiplikator, få beräkna räta pelare, i vilka kantlängdernas mätetal äro bråk.

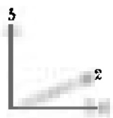
Förvandlingar mellan gamla och nya rymdmått övas också i de högsta klasserna.

Även de omvända problemen — t. ex. att ur rymd och höjd finna basytan — övas.

§ 50. **Femte klassens kurs.**

a) Om vinklar och vinkelmätning.

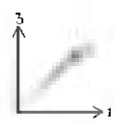
En klar uppfattning av vad som menas med en vinkel och hur en vinkel mätes hör till det allra viktigaste, som undervisningen i geometri skall bibringa barnen. På olika sätt åskådliggöres meningen med begreppet vinkel och hur en vinkel uppkommer. Namnen vinkelspets och vinkelben inläras. Att två räta linjer, som utgå från samma punkt, sägas bilda en vinkel med varandra, det lära sig barnen lätt nog och kunna giva exempel på vinklar och själva rita sådana. Men svårighet uppkommer, när det blir fråga om att *mäta vinklar*. Här måste läraren gå långsamt fram och inte genast vilja lära barnen, hur man mäter vinklar med hjälp av gradskiva. Det gäller först att bibringa barnen föreställningen om *storlek* i samband med vinkelbegreppet; vad som menas med att två vinklar är *lika stora* och att *en vinkel är större än en annan*. Man kan låta barnen tänka på, att vinkelbenen peka i olika riktningar ut från vinkelspetsen, och att vinkeln angiver skillnaden mellan dessa riktningar. Det inses då, att *vinkelbenens längd* ingenting betyder i fråga om denna riktningsskillnad, det blir samma riktningar, som pekas ut, vare sig benen äro långa eller korta. Man säger, att vinkelns storlek är densamma. Man kan så rita upp en bild som denna:



Barnen inse, att det är större skillnad i riktning mellan 1 och 3 än mellan 1 och 2 och få lära sig, att man uttrycker det genom att säga, att vinkeln mellan 1 och 3 är större än vinkeln mellan 1 och 2. Man demonstrerar också, hur en vinkel kan uppkomma genom vridning. Om vi tänka, att linjerna 1 och 2 ursprungligen pekat åt samma håll och så tänka, att vi vrida 2, så blir vinkeln mellan 1 och 2 större, ju mera linjen 2 vrides.

Därpå inläras begreppen rät, spetsig och trubbig vinkel. Begreppet rät vinkel demonstreras på många sätt. När linjen 2 vrides $\frac{1}{4}$ av ett helt varv, sägas riktningarna 1 och 2 bilda rät vinkel med varandra. Barnen få lära känna begreppen lodrät (den riktning en lodlina har) och vågrät (t. ex. den riktning som en sticka, som flyter i en skål med vatten, intar) och inse, att lodrät och vågrät riktning bilda rät vinkel med varandra. Genom vikning av papper få barnen bilda räta vinklar; de få rita sådana med hjälp av linjal och passare samt genom att använda en vinkelhake.

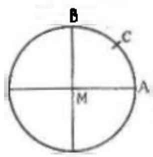
Barnen få nu jämföra olika vinklar med hänsyn till deras inbördes storlek och angiva, om de äro räta, spetsiga eller trubbiga. Sedan de visat, att de kunna detta, äro de mogna att få veta mera om vinklars mätning. De få dela en rät vinkel mitt itu, så att 1 och 2 bilda lika stor vinkel som 2 och 3. Delningen kan ske genom vikning av den räta vinkel, som kanterna i ett pappersark bilda med varandra. Man kan ock visa barnen, hur en vinkel kan halveras med hjälp av passare och linjal. Så kunna de få konstruera en fjärdedels rät vinkel och



förfärdiga pappvinklar av olika storlek: 1 rät, $\frac{1}{2}$ rät, $\frac{1}{4}$ rät. De få nu med ögonmått uppskatta vinklars storlek i bråkdelar av en rät, t. ex. »något mer än $\frac{1}{4}$ rät», och få med hjälp av sina pappvinkelmått kontrollera bedömningens riktighet. När de kommit så langt, äro de mogna att lära *mäta vinklar i grader med hjälp av gradskiva.*

Man talar om för barnen, att $\frac{1}{90}$ av en rät vinkel kallas en grad, och att man brukar angiva vinkelstorleken i grader. Barnen kunna så få angiva, hur många grader $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ etc. rät vinkel är. Och så blir det fråga om hur man skall kunna noggrant mäta vinklar i grader.

Läraren ritar upp en cirkel och drager två vinkelräta diametrar, t. ex.



Vinkeln mellan MA och MB är rät. Barnen inse lätt, att om cirkelbågen AB delas mitt itu i punkten C, blir vinkeln mellan MA och MC en halv rät. Man säger ock, att bågen AC motsvarar $^1/_2$ rät. Och om bågen AB delas upp i 90 lika delar, blir den vinkel, som varje sådan liten del motsvarar, 1 grad. Hade vi en sådan uppdelning av cirkeln, skulle vi lätt noggrant kunna mäta vinklar i grader. Och så få barnen själva göra sig en sådan gradskiva av tunn papp efter lärarens anvisningar. De få avsätta bågar om 60°, 45°, 30°, 15°. Sedan delas 15°-bågarna i 3 lika delar genom prövning. Och varje sådan 5°-båge delas på samma sätt i 5 lika stora delar.

Barnen få naturligtvis sedan öva sig att använda sin gradskiva till mätning av vinklar och till konstruktion av vinklar av uppgiven storlek.

I samband med utredning av vinkelbegreppet få barnen också lära sig, vad som menas med att linjer äro parallella och få lära sig att med hjälp av linjal och vinkelhake draga en linje parallell med en annan.

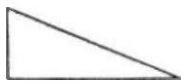
b) Något om plana, rätliniga figurers (särskilt trianglars) form och egenskaper.

Man kan, när vinkelbegreppet är inlärt, mera utförligt uppehålla sig vid olika rätliniga figurers form och egenskaper. Barnen få lära känna kvadrat och rektangel som ett särskilt slags parallellogrammer och få rita upp parallellogrammer av de olika arterna. Triangeln ägnas en mera ingående behandling. Barnen få syssla med konstruktioner av de olika slagen trianglar. Man kan låta dem »upptäcka», hur stor vinkelsumman i en triangel är, och de kunna få finna ut en del satser angående förhållandet mellan sidor och vinklar i en triangel. Som en trevlig repetitionsövning på beräkning av kvadratens yta kunna barnen få mäta och beräkna kvadraterna på en rätvinklig triangels sidor och så upptäcka den pytagoreiska satsen.

I fråga om månghörningar kunna barnen få syssla något med att konstruera regelbundna sådana genom att rita upp en cirkel och dela dess periferi.

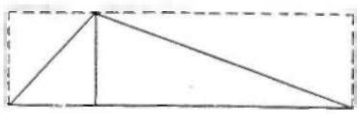
c) Beräkning av triangelns yta.

1. Först beräknas den rätvinkliga triangelns yta. En del av barnen behöva sannolikt ingen hjälp alls för att finna ytan av en sådan triangel, som läraren ritar på tavlan:



De finna dess yta genom att taga hälften av en rektangel, vars sidor utgöras av de båda kateterna. Sedan detta blivit klart för alla, övas sådana beräkningar. Någon annan formel användes ej, än att triangeln är hälften av motsvarande rektangel.

2. Man övergår därefter till beräkning av en snedvinklig triangels yta. Barnen hitta efter någon ledning snart på att uppdela den i rätvinkliga trianglar och kunna ju därefter beräkna dess yta. Med ledning t. ex. av en figur som denna,



i vilken de båda motsvarande rektanglarna äro utprickade, kan ju läraren hänleda barnens uppmärksamhet på att hela triangeln är hälften av hela den utprickade rektangeln, och att vi alltså även här kunna säga, att triangeln är hälften av den motsvarande rektangeln, vilken skall hava samma »bas» och »höjd» som triangeln, varvid begreppen bas och höjd förklaras. Barnen få så öva sig att draga höjder i trianglar och göra beräkningar av triangelytornas storlek.

3. Att man kan välja vilken sida som helst till bas och draga den däremot svarande höjden, och att triangeln även i detta fall blir lika med hälften av den rektangel, som har samma bas och höjd, bör helst genomgås men är icke alldeles nödvändigt, då man ju ändock kan beräkna ytan av varje triangel genom att välja en sådan sida till bas, att höjden faller inuti triangeln.

d) Tillämpning på beräkning av plana rätliniga figurers ytor.

Beräkningen av en godtycklig, plan, rätlinig figurs yta behandlas som en tillämpningsuppgift på det förut inlärda om triangelytors beräkning. Genom att uppdela figuren i trianglar återföres ju beräkningen av dess yta till beräkning av triangelytor. Det är av vikt, att barnens minne ej belastas med ihågkommandet av specialmetoder för de olika figurerna. Inskränker man sig till att fordra — vilket ock markeras för barnen — att de skola veta 1) hur en rektangelyta beräknas, och 2) att triangeln är hälften av »motsvarande» rektangel, medan alla övriga ytberäkningar av plana rätliniga figurer behandlas som tillämpningsexempel, torde barnen ordentligt kunna lära sig detta. Men för man däremot in en hel rad formler — för parallellogrammen, för trapetsiet, för regelbundna månghörningen —, bli barnen lätt förvirrade, och resultatet blir, att de kanske till slut ej kunna utföra någon ytberäkning säkert.

e) Beräkning av en figur, ritad i en viss skala.

Ur en ritning av t. ex. en tomt i viss skala böra barnen kunna bestämma tomtens yta. Tillvägagångssättet blir ju alldeles som förut, men viktigt är att läraren inskärper för barnen, att de ej först skola beräkna ytans storlek å ritningen utan direkt beräkna dess storlek i verkligheten genom att göra beräkningen med användande av de uppmätta sträckornas verkliga längder, vilka ju lätt med skalans hjälp finnas ur deras längder å kartan. Läraren bör ock visa upp, att om man räknar ut figurens ytstorlek å ritningen och multiplicerar den med det tal, som skalan angiver, blir resultatet oriktigt. — I klass 6 eller möjligen först i klass 7 kan sambandet mellan ytskala och längdskala genomgås.

f) Rymdberäkning av räta pelare med förut behandlade ytor till basytor.

Beräkningsmetoden: basytans mätetal gånger höjdens synes barnen ganska självklar här, och man gör sig därför ingen möda med att härleda metoden. — Utmärkta arbetsuppgifter äro även här ritningar av ytnäten till olika pelare och dessas förfärdigande genom vikning och klistring.

§ 51. Sjätte och sjunde klassens kurs.

a) Några egenskaper hos klotet, cylindern, cirkeln och ellipsen.

Någon kännedom om klotets egenskaper är av betydelse för geografiundervisningen. Och man bör ej försumma att vid geometriundervisningen förklara begrepp, såsom skärande plan, storcirkel, lillcirkel, tangentplan, jordaxel, meridianer, ekvator, parallellcirklar, longitud och latitud. — I fråga om cylindern visas, hur cirklar och ellipser uppkomma genom skärande plan.

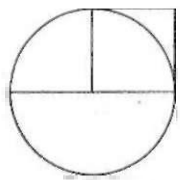
Åt studiet av cirkelns egenskaper ägnas någon tid. Barnen få utföra enkla konstruktioner, såsom uppsökande av medelpunkten och dragande av en tangent. Att radien till en punkt och tangenten i denna punkt bilda rät vinkel, göras de uppmärksamma på. Med sina passare få de rita olika, vackra figurer dels efter lärarens anvisning, dels efter egna påhitt. — Även åt ellipsens egenskaper ägnas någon uppmärksamhet. Man konstruerar en ellips med användande av häftstift och snöre. Begreppen stor- och lillaxel samt brännpunkter inläras. Barnen böra också lära sig konstruera en ellips med uppgiven längd på axlarna, ett konstruktionsproblem, som de med någon ledning kunna klara upp. Det gäller att bestämma brännpunkternas läge på storaxeln. Sedan man funnit ut, att deras avstånd från ena ändpunkten av ellipsens lillaxel är lika med halva storaxeln, ligger konstruktionen i öppen dag.

b) Beräkning av cirkelns omkrets.

Genom mätningar skola barnen finna *förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter.* Dessa mätningar böra föregås av uppskattning med ögonmått. Barnen gissa då i allmänhet på talen 2, 3 och 4. Har läraren ett tillräckligt stort antal cirkelrunda skivor att dela ut till klassen, kan mätningen företagas i skolan, annars gives den till hemuppgift. Omkretsens och diameterns längder antecknas, och genom division finnes förhållandet dem emellan. Läraren antecknar de olika resultaten, och ett medelvärde uträknas. Ha barnen arbetat noggrant, finner man talet 3,14. Så övas beräkning av omkretsens längd ur diameterns och tvärtom. Läraren påpekar, att talet $3\frac{1}{7}$ är nästan lika med 3,14 och därför också kan användas. Vill man bara ha ett mycket ungefärligt värde på omkretsen, kan man ju t. o. m. använda talet 3. Huvudräkningsövningar äro mycket nyttiga för inpräglande av den nu funna satsen. Vid dessa är det ofta bekvämt att använda talet $3\frac{1}{7}$. Är diametern t. ex. 15 cm. tages den först 3 gånger, alltså 45 cm., så tages $\frac{1}{7}$ av 15, vilket blir $2\frac{1}{7}$, omkretsen är alltså $47\frac{1}{7}$ cm. Barnen kunna här övas med approximativa räkningar. så att läraren endast fordrar, att de skola angiva omkretsen i helt tal; i det nämnda exemplet skulle alltså svaret i så fall bliva: ungefär 47 cm.

c) Beräkning av cirkelns yta.

Här gäller det att jämföra cirkelns yta med ytan av en kvadrat, som har en sida lika stor som cirkelns radie (kvadraten å radien). Man uppritar en cirkel och en sådan kvadrat, t. ex.,



och barnen få säga, hur många gånger de anse cirkelns yta vara så stor som kvadratens. Svaren bli också här sannolikt 2, 3 och 4. Så gäller det att företaga en noggrann mätning. En sådan få barnen själva utföra genom att på millimeterpapper upprita en cirkel med t. ex. 5 centimeters radie, vilkens yta bestämmes genom räkning av antalet kvcm.- och kvmm.-rutor, som den innehåller. Läraren gör en del anvisningar till förenklande av räkningen. Dels dragas två vinkelräta diametrar, så att endast rutorna i en cirkelkvadrant behöva räknas. Dels visar läraren, att man ej behöver räkna antalet kvmm. i alla de delade kvcm.-rutorna, då dessa äro lika två och två. I fråga om de kvmm.-rutor, som delas, få barnen göra en skattning. Det är klart, att detta arbete kräver stor noggrannhet, men det är ej svårare, än att barnen kunna utföra det, och det blir just genom den noggrannhet, det kräver, en nyttig övning. Sedan man bestämt cirkelns yta, divideras dess yta med kvadratens (25 $cm.^2$). Resultaten av de olika bestämningarna uppskrivas, och medelvärdet blir, om barnen arbetat noggrant, sannolikt 3,14. Därpå övas beräkning av cirkelns yta ur radiens längd. Någon formel som $y = 3{,}14 \cdot r \cdot r$ gives ej, utan man nöjer sig med det nu funna, nämligen att cirkelns yta är 3,14 (eller $3\frac{1}{7}$) gånger så stor som ytan av kvadraten å radien. Vid beräkningen tar man alltså först reda på denna kvadrats yta, vilken sedan multipliceras med 3,14.

d) Beräkning av radien, då cirkelns yta är given. Kvadratrotsutdragning.

Ställas barnen inför problemet att upprita en cirkel, som har en yta av 50,24 cm.^{2}, torde uppgiften ej behöva bereda dem några särskilda svårigheter. De taga först reda på ytan av kvadraten å radien genom att dividera 50,24 med 3,14, och få till kvot talet 16. Men är kvadratens yta 16 cm.^{2}, inse de, att dess sida måste vara 4 cm.

Talet 4 kallas kvadratroten ur 16, och operationen betecknas $\sqrt{16}$. Vi anse, att *barnen skola göras förtrogna med både begreppet och beteckningen.* Uttrycket roten ur ett tal samt rotbeteckningen möta ofta, särskilt i populärvetenskaplig litteratur, och då barnen på några minuter kunna lära denna sak, är det också lämpligt låta dem få lära det. En helt annan sak är frågan, om barnen skola lära den vanliga metoden för rotutdragning, vilket vi anse, att de självklart ej skola göra. Men de kunna få en del exempel på rotutdragning, som de få lösa genom att *experimentera sig fram.* T. ex.: Hur stor är radien i en cirkel, vars yta är 20 dm.^{2}? Genom division med 3,14 finna de, att kvadratens yta är 637 cm.^{2}. Så gäller det att finna ett tal, som multiplicerat med sig självt blir 637. Barnen finna snart ut, att det skall ligga mellan 25 och 26, och efter några multiplikationsexperiment, att det skall ligga mellan 25,2 och 25,3. Därmed har man bestämt radien på millimetern och kan vara nöjd. Detta är visserligen tidsödande, men att märka är, att barnen ej få syssla med denna sak för att lära någon snabb metod utan dels för att lära, vad som menas med roten ur ett tal och dels för tankeövningens skull; uträkningarna äro ju för övrigt nyttiga som övningar i multiplikationsräkning.

e) Beräkning av cylinderns yta och volym.

En lämplig arbetsuppgift är att rita ytnätet till en cylinder och förfärdiga en sådan. Härigenom blir det klart, hur cylinderns mantelyta skall beräknas. I fråga om volymen betraktas det som självklart, att den skall beräknas som alla andra räta pelare.

f) Lösning av problem med användning av likformig avbildning. Enkel fältmätningsövning.

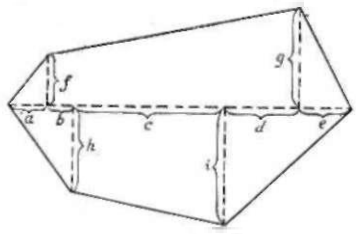
Som lämpliga uppgifter härvid nämna vi:

1) Beräkning av ett föremåls höjd ur dess skuggas längd.

2) Beräkning av en ytas storlek i verkligheten ur en ritning i viss skala, vilken uppgift redan förekom i förra klassen.

3) Uppmätning å fältet av en månghörning. Ritning av den i viss skala och beräkning av dess yta.

T. ex. en månghörning som nedanstående:



Vid mätningen å fältet uppmätas de utprickade sträckorna *a*—*i*, vilka sedan uppritas i viss skala, varefter månghörningen uppritas och beräknas. Alla sträckor, som behövas för uträkningen av trianglarna, äro nu kända.

4) Beräkning av avståndet till en punkt genom uppmätning av en baslinje och två vinklar.

I sjuklassig folkskola behandlas denna uppgift lämpligen först i sjunde klassen. Uppgiften löses naturligtvis så, att baslinjen avbildas i lämplig skala, varefter de uppmätta vinklarna avsättas vid den, så att å ritningen erhålles en triangel, likformig med den i verkligheten givna. Genom mätning av det sökta avståndet å ritningen kan dess storlek i verkligheten ju finnas med skalans hjälp.

Uppgiften intresserar barnen mycket och bör med hänsyn till dess stora betydelse medtagas vid folkskolans geometriundervisning. Att man ej kan giva något strängt bevis för trianglarnas likformighet, utgör ej något hinder för uppgiftens medtagande.

g) Grafiska uppgifter.

Enkla kurvdiagram och andra grafiska åskådningsmedel böra förklaras för barnen. Man kan ock påpeka en del missvisande grafiska bilder, t. ex. när en person avbildas dubbelt så lång som en annan för att åskådliggöra, att antalet personer i ett fall är dubbelt så stort som i ett annat. Vid bedömandet av personernas storlek fäster man sig ej bara vid deras längd, och av bilden får man därför intrycket, att olikheten är större, än den i verkligheten är.

h)

I sjuklassig skola kan man hinna bättre repetera den nu genomgångna kursen och räkna något svårare tillämpningsuppgifter. Kursen torde också lämpligen utvidgas i följande avseenden.

Barnen få lära sig att beräkna pyramidens och konens yta och volym. Vid beräkningen av konens yta genomgås först, hur en *cirkelsektors* yta beräknas. I fråga om volymen få barnen jämföra konen eller pyramiden med en rät pelare med samma basyta och höjd och genom jämförande mätning finna ut, att pyramidens eller konens volym är $\frac{1}{3}$ av den motsvarande räta pelarens.

Klotets volym beräknas. Genom mätning av ett ihåligt halvklots volym finner man satsen, att klotets volym är $\frac{2}{3}$ av motsvarande cylinders.

Slutligen kunna barnen ock få övning att använda formler. Utan att formlerna inläras eller bevisas få barnen lära sig att använda dem för beräkningar, t. ex. av klotets yta, tunnans samt den stympade pyramidens och konens volymer.