GEOMETRI

OCH

LINEARTECKNING,

för den första undervisningen
utarbetad

Carl A. Tiselius

AF

A. Th. Bergius,
Lärare vid Nya Elementarskolan i Stockholm.

Karl Johan

TREDJE UPPLAGAN.

STOCKHOLM, 1862.
P. A. NORSTEDT & SÖNER,
Kongl. Boktryckare.

Utur Förord till Första Upplagan.

Hvar och en, som undervisat i Geometri, har erfarenhet af den svårighet, som lärjungen har att fatta definitionerna på punkt, linie, yta, solid figur m. fl., med hvilka undervisningen i Geometri hos oss vanligen börjar, och mången erinrar sig säkerligen från sin egen skoltid, hurusom dessa abstrakta begrepp, äfven sedan han genomgått en eller annan bok af Euclides, ännu voro dunkla och orediga för honom. Euclides elementa utgör ett logiskt mästerverk, som förutsätter ett utbildadt matematiskt förstånd, hvilket man icke kan antaga, att nybegynnaren äger. Om några med utmärktare anlag utrustade lärjungar lyckats öfvervinna de svårigheter, som blifva en nödvändig följd deraf, att man gör otillbörliga fordringar på deras fattningsförmåga, så hafva likväl deras framsteg deraf blifvit mycket fördröjda. Man har sökt förekomma dessa olägenheter derigenom, att man låtit lärjungen till en början genomgå en kurs i linearteckning på fri hand, hvaraf han ostridigt förvärfvat en viss konstfärdighet jemte säkerhet i hand och öga, som är af stor nytta för hans vidare framsteg i frihandsteckning; men för hans blifvande studium af Geometrin, medför likväl icke Linearteckningen all dermed åsyftad nytta, då den är blott mekanisk, hvilket den nödvändigt måste blifva, så länge man af lärjungen fordrar, att han skall i bilder framställa det, hvarom han icke har något, eller hvarom han åtminstone har ett högst oredigt begrepp. Vid undervisningen i Geometrin, likasom i hvarje annat läroämne, är det nödvändigt, att man utgår från den ståndpunkt, på hvilken lärjungen befinner sig. Nybegynnaren i Geometrie befinner sig på åskådningens ståndpunkt, och från denna är det således naturligast att utgå. Linearteckningen på fri hand ställes i sitt rätta samband med den geometriska undervisningen, om lärjungen får afbilda de storheter, hvarmed han först genom omedelbar åskådning blifvit bekant. — Härmed vill förf. korteligen hafva antydt orsaken till *utarbetandet af närvarande lärobok i Geometri. — Hvad lärobokens plan för öfrigt angår, har förf. i första kursen, åskådningsläran, framställt 14 enkla kroppar till lärjungens betraktande, låtit honom hos dessa uppsöka deras utmärkande kännetecken, fästat hans uppmärksamhet på gränsytornas, kantliniernas o. s. v. olika form, lutning m. m., eller i allmänhet på de grundbegrepp, som Geometrin innehåller. Förf:s val af tärningen till den kropp, med hvilken lärjungen bör begynna, torde rättfärdigas af denna kropps enkla form och lättfattliga kännemärken. De afbildningar, som i första kursen förekomma, hafva för ändamål, så väl att fästa i lärjungens minne, och förtydliga för honom det redan inhämtade, hvarföre de ock äro stälda i närmaste samband med de särskilta för honom framstälda kropparna, som ock att gifva honom den säkerhet i linearteckning, som vinnes genom ett noggrannt utförande af dessa afbildningar. De afbildningar, som framställa kropparnas gränsytor, fig. 53, 56, 57, 62, 66, 76—79, 87—91, bör lärjungen uppmuntras att utföra på papp eller annat tjockt papper, och göra inskärningar efter föreningslinierna emellan gränsytorna, för att kunna sammanvika papperet, och sammansätta de kroppar, hvilkas gränsytor han efterbildat. — De 14 kroppar, som behöfvas i första kursen, böra vara gjorda af trä eller papp. — — — — — — — — — — — — — —*

A. Th. Bergius.

Innehåll.

Första Kursen.

Åskådningslära.

Andra Kursen.

Storhetslära.

I. *Linier och rätliniga vinklar.*

II. *Plana figurer.*

III. *Kroppar.*

Första Kursen.

ÅSKÅDNINGSLÄRA.

1. Tärningen (kuben).

A. Ytorna.

Denna tärning är omgifven af 6 *gränsytor* — en yt på hvilken han ligger, en annan midt emot denna, oc 4 stående ytor. Alla gränsytorna hafva samma *for* och *storlek*.

Lägges tärningen på en af sina gränsytor mot e bordskifva, som är *jemnlöpande med det stillaståen vattnets yta*, så har denna gränsyta ett *vattenrätt* ell *vågrätt* läge (ett sådant läge, som angifves af armarr på en våg i jemnvigtställningen). Sådant läge har c äfven den motstående uppåt vända gränsytan.

Dessa båda gränsytor äro *jemnlöpande (parallela* d. ä. öfverallt lika långt ifrån hvarandra.

De öfriga 4 gränsytorna hafva i detta fall ett *lo rätt* läge (ett sådant läge, som angifves af ett vid e tråd fritt hängande lod).

Hvar och en af de fyra lodräta ytorna är äfv *jemnlöpande* med den motstående.

Frågor och uppgifter.

1. Huru många gränsytor omgifva tärningen?

2. Utvisa dessa gränsytor, och angif, i hvilka afseenden de öfverensstämma med hvarandra!

3. Sätt något märke på en af gränsytorna, och gif tärningen ett sådant läge, att denna yta blir vågrät! — Är någon annan gränsyta nu äfven vågrät? — Hvilket läge hafva de 4 återstående gränsytorna?

4. Gif tärningen ett sådant läge, att den utmärkta ytan blir lodrät! — Hvilket läge har hvardera af de öfriga gränsytorna?

5. Hvilken gränsyta är jemnlöpande med den utmärkta gränsytan? — Äro några andra gränsytor jemnlöpande med hvarandra? — Hvilka?

6. Ställ tärningen så, att den utmärkta ytan är vänd rätt framåt! — Hvilken yta är vänd bakåt? — Hvilken uppåt? — Hvilken nedåt? — Hvilken åt höger? — Hvilken åt venster?

7. Utmärk med en siffra (1, 2, 3, 4, 5, 6) hvar och en af gränsytorna, ställ tärningen framför dig på bordet, och framställ i ett sammanhang allt, hvad du finner att anmärka i afseende på gränsytornas antal, lägen och storlek.

B. Kantlinierna.

Tärningen har 12 *räta kantlinier.* Lägges tärningen på en af sina gränsytor mot en vågrät bordskifva, så äro 8 kantlinier *vågräta* och 4 *lodräta.*

Hvardera gränsytan är omgifven af 4 kantlinier.

En af 4 *räta linier (sidor)* begränsad yta kallas *fyrsiding.*

Tärningens gränsytor äro *fyrsidingar.*

Alla kantlinierna äro lika långa. Tärningens gränsytor äro *liksidiga fyrsidingar.*

Hvar och en af de kantlinier, som omgifva någon af tärningens gränsytor, utgör *öfvergången* mellan denna och en annan gränsyta.

En och samma kantlinie tillhör 2 gränsytor.

Genom sina kantlinier står hvarje gränsyta i *förbindelse* med 4 andra gränsytor. Med den motstående med henne jemnlöpande gränsytan har den deremot *ingen beröring.*

Hvar och en kantlinie har 2 *gränspunkter.* I hvardera gränspunkten sammanträffar den med 2 andra kantlinier.

Hvarje kantlinie är *jemnlöpande med 3 andra kantlinier.*

Två och två af de 4 kantlinier, som omgifva samma gränsyta, äro *jemnlöpande* med hvarandra.

Fyrsidingar, som hafva de motstående sidoparen *jemnlöpande (parallela),* kallas *parallelogrammer.*

Tärningens gränsytor äro *parallelogrammer.*

Frågor och uppgifter.

1. Huru många äro tärningens kantlinier? — Är dessa kantlinier räta eller krokiga?

2. Gif tärningen ett sådant läge, att 4 kantlinier äro lodräta! — Hvilket läge hafva de öfriga kantlinierna?

3. Huru många kantlinier omgifva hvarje gränsyta? — Huru kallas en af 4 räta linier begränsad yta? — Af hvad slag äro tärningens gränsytor?

4. Äro kantlinierna lika stora eller olika? — Hvad slags fyrsidingar äro tärningens gränsytor?

5. Är samma kantlinie gräns för mer än en gränsyta

6. Utmärk en af kantlinierna och utvisa, mellan hvilka gränsytor den bildar öfvergången, eller för hvilka den utgör en gemensam gräns! — Af hvilka andra kantlinier är hvardera af *dessa* ytor dessutom begränsad?

7. Med huru många gränsytor står *denna* (en viss utmärkt) gränsyta i beröring? — Hvilka kantlinier utgöra beröringslinierna? — Med hvilken gränsyta står den icke genom sina kantlinier i beröring?

8. Huru många gränspunkter har hvarje kantlinie? — Hvar ligga gränspunkterna för *denna* kantlinie?

9. Med huru många andra kantlinier sammanträffar *denna* kantlinie? — Med hvilka?

10. Med huru många andra kantlinier är *denna* jemnlöpande? — Med hvilka? — Utvisa de kantlinier med hvilka den icke är jemnlöpande!

11. Utvisa två kantlinier, som både äro jemnlöpande och tillhöra samma gränsyta! — Äro några andra kantlinier i samma gränsyta jemnlöpande med hvarandra?

12. Huru kallas fyrsidingar, som hafva de motstående sidoparen jemnlöpande? — Af hvad slag äro således tärningens gränsytor?

13. Ställ tärningen framför dig, och framställ i ett sammanhang, hvad du finner att anmärka i afseende på kantliniernas antal, lägen, storlek o. s. v.!

C. Kantvinklarna *).

Vid hvarje kantlinie ligger en *kantvinkel.* Tärningen har 12 kantvinklar.

Hvar och en af tärningens gränsytor sammanträffar i sina kantlinier med 4 andra gränsytor och har mot hvardera af dem en viss lutning, eller bildar med hvardera af dem en *kantvinkel (vrå).*

Om tärningen lägges på en af sina gränsytor mot en vågrät bordskifva, så bildar hvar och en af de båda vågräta gränsytorna 4 kantvinklar med de 4 lodräta ytorna.

När en vågrät yta sammanträffar med en lodrät, bildar den dermed en *rät kantvinkel.* Två ytor, som hafva till hvarandra samma lutning, som en vågrät yta mot en lodrät, bilda äfven en *rät kantvinkel.*

Alla tärningens kantvinklar äro *räta.* Om en af gränsytorna är vågrät, så äro alla de gränsytor vågräta, med hvilka den sammanträffar och bildar kantvinklar.

---

*) En *kant* utgöres af kantlinien (ytornas skärningslinie) och kantvinkeln (ytornas lutning).

Två och två sammanträffande gränsytor äro *vinkelräta* mot hvarandra.

Vill man undersöka, om en viss bestämd kantvinkel p tärningen är en *rät kantvinkel*, så ger man en af de båd gränsytorna, som bilda kanten, ett vågrätt läge. Om de andra då har ett lodrätt läge, så är kantvinkeln rät.

Frågor och uppgifter.

1. Huru många äro tärningens kantvinklar?

2. Huru uppkommer en kantvinkel? — Med hur många andra gränsytor bildar *denna* gränsyta kantvinklar — Med hvilka?

3. Äro tärningens kantvinklar lika eller olika? — Hu rudana äro de?

4. Hvad menas med en rät kantvinkel? — Undersök om alla tärningens kantvinklar äro räta!

5. Bildar en gränsyta någon kantvinkel med den me henne jemnlöpande gränsytan? — Kunna i allmänhet jemnlöpande ytor bilda någon kantvinkel med hvarandra? — Hvarför icke?

6. Framställ i ett sammanhang allt, hvad du finne att anmärka i afseende på tärningens kantvinklar!

D. Vinklarna.

Hvarje kantlinie sammanträffar i sina båda gräns punkter med 2 andra kantlinier och har emot hvar oc en af dem en viss *lutning*, eller bildar med hvar och e af dem en (linie-) *vinkel.* Linierna, som omfatta vin keln, kallas *vinkelns sidor* eller *vinkelns ben.*

Hvarje gränsyta innehåller 4 *vinklar. Alla gräns ytorna* innehålla 24 *vinklar.*

Om man utmärker 2 kantlinier, som med hvaran dra sammanträffa och således bilda en vinkel, så ka man alltid gifva tärningen en sådan ställning, att en a dessa båda kantlinier blir vågrät, och den andra lodrä

Alla tärningens vinklar äro *räta vinklar*. Två och två sammanträffande kantlinier äro *vinkelräta* mot hvarandra.

Alla räta vinklar äro lika stora. *Alla tärningens vinklar* äro *lika stora*. *Vinkelspetsarne* ligga vid kantliniernas gränspunkter.

Tärningens gränsytor äro således *liksidiga* och *rätvinkliga parallelogrammer*.

En liksidig och rätvinklig parallelogram kallas *qvadrat*.

Tärningen är begränsad af 6 *lika stora qvadrater*.

Frågor och uppgifter.

1. Huru kallas den lutning, som två sammanträffande linier hafva till hvarandra? — Hvad menas med en vinkels ben eller sidor? — Kunna två linier, som icke sammanträffa, bilda någon vinkel med hvarandra?

2. Huru många vinklar innehåller hvarje gränsyta? — Huru många vinklar innehålla alla gränsytorna tillsammans?

3. Utmärk en viss kantlinie, och utvisa de öfriga kantlinier, med hvilka den bildar vinklar! — Utvisa till hvilka gränsytor hvar och en af dessa vinklar hör!

4. Äro tärningens vinklar lika stora eller olika? — Af hvad slag äro tärningens vinklar? — Hvilken egenskap tillkommer således två sammanstötande kantlinier med afseende på deras lutning?

5. Hurudana parallelogrammer äro tärningens gränsytor? — Huru kallas med ett ord liksidiga och rätvinkliga parallelogrammer? — Äro de qvadrater, som begränsa tärningen, lika stora eller olika?

6. Framställ i ett sammanhang, hvad du finner att anmärka i afseende på tärningens vinklar!

E. Hörnen.

Tärningen har 8 hörn. Står tärningen på en af sina gränsytor, så ligga 4 hörn *uppåt* och 4 *nedåt*.

I hvarje hörn sammanträffa 3 *gränsytor*, 3 *kan linier*, 3 *kantvinklar* och 3 *linievinklar*.

Om tärningen ställes på en af sina gränsytor m en vågrät bordskifva, så sammanträffa i hvarje hörn *vågrät* och 2 *lodräta gränsytor*, samt 1 *lodrät* och *vågräta kantlinier*.

Hvarje gränsyta hörer till 4 hörn, i hvilka d sammanträffar med 4 andra gränsytor. Med den jem löpande gränsytan sammanträffar den icke.

Alla hörnen äro *trekantiga* hörn. De hafva a *samma form* och *storlek*.

Om ett hörn skall kunna bildas, måste 3 eller fl ytor sammanträffa i en punkt. Genom 2 ytors samm träffande uppkommer en kant, men intet hörn.

Frågor och uppgifter.

1. Huru många äro tärningens hörn? — Utvisa de

2. Lägg tärningen på en af sina gränsytor och utv hvilka hörn ligga uppåt och hvilka nedåt!

3. Huru många gränsytor sammanträffa i hvarje hö — Hvilka gränsytor stmmanträffa i *detta* hörn? — Hvi i *detta?* — i *detta?*

4. Till huru många hörn hörer *denna* gränsyta? Till hvilka? — Med hvilka gränsytor sammanträffar de *dessa* hörn? — Med hvilken sammanträffar den icke? — Hv före kan den ej sammanträffa med den sistnämda?

5. Huru många kantlinier sammanträffa i hvarje hö — Hvilka kantlinier sammanträffa i *detta* hörn? — Hvilk *detta?* — i *detta?*

6. Med hvilka kantlinier sammanträffar *denna* i nå hörn? — Med hvilka sammanträffar den icke?

7. Ställ tärningen så, att 1 vågrät och 2 lodr gränsytor samt 1 lodrät och 2 vågräta kantlinier samm träffa i hvarje hörn!

8. Huru många vinklar sammanträffa i hvarje hö — Utvisa de vinklar, som sammanträffa i *detta* hörn! - *detta!* — i *detta!*

9. Tillhöra de vinklar, som sammanträffa i ett hörn, samma eller olika gränsytor?

10. Äro tärningens hörn af lika eller olika form och storlek? — Huru mängkantigt är hvarje hörn? — Är ett tvåkantigt hörn tänkbart?

11. Framställ i ett sammanhang, hvad du finner att anmärka i afseende på tärningens hörn!

F. Axlarna.

En rät linie, som drages (tänkes dragen) genom tärningen mellan de båda punkter i två motsatta gränsytor, som äro till samma afstånd från gränsytornas 4 vinkelspetsar, kallas en *ytaxel.*

Tärningen har 3 *ytaxlar.*

En rät linie, som drages (tänkes dragen) genom tärningen från medelpunkten af en kantlinie till medelpunkten af den motstående kantlinien på tärningens motsatta sida, kallas en *kantaxel.*

Tärningen har 6 *kantaxlar.*

En rät linie, som drages (tänkes dragen) genom tärningen från ett hörn till det motstående hörnet på tärningens motsatta sida, kallas en *hörnaxel.*

Tärningen har 4 *hörnaxlar.*

Alla ytaxlar, kantaxlar och hörnaxlar skära hvarandra *i en och samma punkt* midt inuti tärningen.

Man kan tänka sig tärningen vriden omkring hvar och en af axlarna.

Frågor och uppgifter.

1. Huru många äro tärningens ytaxlar? — Utmärk de punkter på tärningens gränsytor, som äro gränspunkter för ytaxlarna! — Utmärk de punkter på 2 jemnlöpande gränsytor, som äro gränspunkter för samma ytaxel!

2. Huru många äro tärningens kantaxlar? — Utmär de punkter på tärningens kantlinier, som äro gränspunkt för kantaxlarna! — Utmärk de punkter på två jemnlöpan kantlinier, som äro gränspunkter för samma kantaxel!

3. Huru många äro tärningens hörnaxlar? — Utmär de punkter på tärningen, som äro gränspunkter för hör axlarna! — Utmärk de punkter, som äro gränspunkter f samma hörnaxel!

4. Hvar ligger alla axlarnas gemensamma skärning punkt?

5. Ställ tärningen så, att en af dess ytaxlar har lodrät riktning! — Hvilken riktning hafva då de båda a dra ytaxlarna?

6. Håll tärningen så, att en af dess kantaxlar har lodrät riktning! — Hvilken riktning hafva då de 5 öfri kantaxlarna?

Sned riktning är en sådan, som hvarken är lodrät ell vågrät.

7. Håll tärningen så, att en af dess hörnaxlar är lo rät! — Har någon af de öfriga hörnaxlarna en lodrät ell vågrät riktning?

8. Framställ i ett sammanhang, hvad du finner a anmärka i afseende på tärningens axlar.

Afbildningar *).

1. Drag på taflan *ett rakt streck (en rät linie)* (fig.

a. *uppifrån nedåt!*
b. *nedifrån uppåt!*
c. *från venster åt höger!*
d. *från höger åt venster!*
e. *åt höger uppåt!*
f. *åt venster nedåt!*
g. *åt höger nedåt!*
h. *åt venster uppåt!*

När lärjungen skall på fri hand draga en rät lin utmärker han först med en prick på taflan liniens begy nelsepunkt och sedan dess slutpunkt, och fäster dereft

*) Lineartekning på fri hand.

oafbrutet under liniens uppdragning ögat på den punkt, dit linien skall dragas. Först sättas de båda prickarna nära intill hvarandra, sedan på större afstånd.

Man låter lärjungen öfva sig att draga streck i de angifna 8 riktningarna, till dess det lyckas honom att få dem någorlunda raka.

2. Sätt en prick vid taflans venstra rand, och drag derifrån en rät linie *åt höger uppåt,* och en annan *åt höger nedåt* (fig. 2)!

3. Sätt en prick vid taflans venstra rand, och drag derifrån en *rät linie åt höger hvarken uppåt eller nedåt, utan vågrätt* (fig. 1 c. d.)!

4. Drag från en prick vid taflans högra rand en rät linie *åt venster uppåt,* och en annan *åt venster nedåt* (fig. 3)!

5. Drag från en prick vid taflans högra rand en *vågrät* linie åt venster (fig. 1 c. d.)!

6. Drag från en prick vid taflans öfre rand en rät linie *åt venster nedåt,* och en annan *åt höger nedåt* (fig. 4)!

7. Drag från en prick vid taflans öfre rand en rät linie nedåt, som hvarken går åt höger eller venster, utan är *lodrät* (fig. 1 a. b.)!

8. Drag från en prick vid taflans nedre rand en rät linie *åt höger uppåt,* och en annan *åt venster uppåt* (fig. 5)!

9. Drag från en prick vid taflans nedre rand en *lodrät* linie uppåt (fig. 1 a. b.)!

10. Drag från en prick hvar som helst på taflan en *sned* linie, d. ä. en sådan, som hvarken är lodrät eller vågrät (fig. 6)!

11. Drag en lodrät linie, och derefter genom en punkt utom densamma en annan lodrät linie (fig. 7 a. b.)! De båda lodräta linierna äro *jemnlöpande.*

12. Drag en *vågrät* linie, och derefter *genom en punkt* (prick) utom densamma en annan *vågrät* linie (fig. 7 c. d.)! Lärjungen uppdrager i början den andra vågräta linien från den gifna punkten först till höger och sedan till venster; men sedermera bör han välja en sådan punkt till venster och en sådan till höger om den gifna punkten, att han

på en gång kan uppdraga den andra vågräta linien gen
den gifna punkten. Härvid och vid de följande öfningar
följes den förut (n:o 1) gifna anvisning.

De båda vågräta linierna äro *jemnlöpande.*

13. Drag *i hvardera af de* i n:o 1 *uppgifna rikt*
garna, a, b, c, d, e, f, g, h, 2 räta linier, som sins emel
äro *jemnlöpande* (fig. 7)!

Lärjungen drager först i den bestämda riktningen
rät linie, och derefter genom en sjelfvald punkt utom d
samma (först nära och sedan till längre afstånd) den
med jemnlöpande linien. Härvid följes den förut (n:o
gifna anvisningen.

14. Drag en *vågrät* linie, och sedan (fig. 8)

a. från dess *venstra* ändpunkt en *lodrät* linie *uppåt!*
b. » *högra* » » » *uppåt!*
c. » *venstra* » » » *nedåt!*
d. » *högra* » » » *nedåt!*

Hvardera af de lodräta linierna träffar den vågrät
en punkt och bildar med henne en *rät vinkel.* Den pu
der linierna sammanträffa, är vinkelns spets. Hvardera
de lodräta linierna är *vinkelrät* mot den vågräta, och
vågräta är *vinkelrät* mot hvardera af de lodräta. De b
linierna, som bilda vinkeln, äro *vinkelns sidor* eller
kelns ben.

15. Drag en vågrät linie, och från en punkt på de
en lodrät linie så väl *uppåt,* som *nedåt* (fig. 9)!

Den lodräta linien *skär* den vågräta i en punkt
bildar med henne 4 *räta vinklar.* Alla vinkelspetsarna s
manträffa i *skärningspunkten.*

16. Drag en vågrät linie, och från hvilken punkt
helst *ofvanför* denna linie en lodrät linie, till dess den
far den vågräta (fig. 10)!

Den lodräta linien bildar med den vågräta linien 2
vinklar. Den vågräta linien förlänges, om det är nödig

17. Drag en vågrät linie, och från hvilken punkt
helst *nedanför* denna linie en lodrät linie, till dess den
far den vågräta (fig. 11)!

Se anm. till n:o 16.

18. Drag en *lodrät* linie, och sedan (fig. 8)

a. från dess *nedre* ändpunkt en vågrät linie *åt höger!*
b. » *nedre* » » *åt venster!*
c. » *öfre* » » *åt höger!*
d. » *öfre* » » *åt venster!*

Se anm. till n:o 14 med den skillnad att orden vågrät och lodrät utbytas mot hvarandra.

19. Drag en lodrät linie, och genom en punkt på denna en vågrät linie så väl åt höger som åt venster (fig. 9)!

20. Drag en lodrät linie, och från hvilken punkt som helst till venster om denna linie en vågrät linie, som *träffar* densamma: samt från hvilken punkt som helst till höger om den lodräta linien en vågrät linie, som *träffar* densamma (fig. 12)!

21. Drag en sned linie, och från dess ena ändpunkt en rät linie, som med den förra gör en *rät vinkel*, eller är deremot vinkelrät (fig. 13).

Vinkeln, som de båda räta linierna bilda, bör vara lika stor med den, som en vågrät och en lodrät linie bilda med hvarandra.

22. Drag en sned linie, och från en punkt på densamma en rät linie, som med densamma gör 2 *räta vinklar* (fig. 14)!

23. Drag en sned linie, och från hvilken punkt som helst utom densamma en rät linie, som träffar den, och dermed bildar 2 *räta vinklar* (fig. 14)!

Den sneda linien förlänges, om det är nödigt.

24. Drag en sned linie, och från någon punkt utom denna linie en rät linie, som skär densamma så, att den dermed bildar 4 *räta vinklar* (fig. 15).

25. Drag en vågrät linie, och dela den i 2 *lika stora delar* (fig. 16)!

26. Drag en vågrät linie, och dela den i 4 *lika stora delar* (fig. 17)!

Den vågräta linien delas först i 2 lika stora delar, och hvardera delen åter i 2 lika stora delar.

27. Drag en lodrät linie, och dela den i 2 *lika st*
delar (fig. 18):

28. Drag en lodrät linie och dela den i 4 *lika st*
delar (fig. 19)!

29. Drag en sned linie och dela den (fig. 20)

a. *i 2 lika stora delar!*

b. *i 4 lika stora delar!*

30. Drag en rät linie, som är *lika stor* med en
nan rät linie (fig. 21)!

31. Drag en rät linie, som är 2 *gånger så stor*, s
en annan rät linie (fig. 22)!

32. Drag en rät linie, som är 4 *gånger så stor*, s
en annan rät linie (fig. 23)!

33. Drag en vågrät linie, och sedan från denna lir
venstra ändpunkt en lodrät linie uppåt, som är *lika*
med den förra (fig. 24)!

34. Drag en vågrät linie, och från hvar och en
denna linies båda ändpunkter en lodrät linie, som är *l*
stor med densamma (fig. 25)!

35. Drag en vågrät linie, och från denna linies v
stra ändpunkt en *lodrät linie uppåt*, som är *lika stor* n
den förra; drag sedan från den lodräta liniens öfre ändpu
en *vågrät linie* åt höger, som är lika stor med hvardera
de båda förra, och slutligen en rät linie emellan de bå
vågräta liniernas *högra ändpunkter* (fig. 26)!

Den af räta linier *begränsade yta* (rätliniga figur), s
härigenom uppkommer, är en *liksidig* och *rätvinklig fy*
ding, d. ä. en *qvadrat*.

36. Drag en rät linie i sned riktning, och från d
ena ändpunkt en rät linie, vinkelrät mot och lika stor n
den förra; drag sedan från den sist dragna liniens fria ä
punkt åt samma sida en rät linie, vinkelrät mot och l

stor med henne, och slutligen en rät linie mellan den första och sista liniens fria ändpunkter (fig. 27)!

Den rätliniga figur, som blifvit tecknad, är en qvadrat i sned ställning.

37. Drag en vågrät linie och upprita på densamma en qvadrat (fig. 26)!

Utföres enligt 35.

38. Drag en sned linie och upprita på densamma en qvadrat (fig. 27)!

Utföres enligt 36.

39. Upprita 2 lika stora qvadrater, som hvardera hafva 2 vågräta och 2 lodräta sidor (gränslinier) (fig. 28)!

40. Upprita 2 olika stora qvadrater, den ena med 2 vågräta och 2 lodräta sidor, den andra med sidorna i en sned riktning (fig. 29)!

---

2. Regelbundna trekantiga pelaren (prismat).

A. Ytorna.

Den regelbundna trekantiga pelaren är omgifven af 5 gränsytor, af hvilka 2 äro *tresidingar* (trianglar) och 3 *fyrsidingar.*

De båda tresidingarne ligga midt emot hvarandra, äro jemnlöpande och af samma form och storlek.

De tre fyrsidingarne äro äfven af samma form och storlek, men ingen af dem är jemnlöpande med någon annan gränsyta.

Står pelaren på en af tresidingarne så, att denna gränsyta är *vågrät,* så är den andra tresidingen äfven *vågrät,* och de tre fyrsidingarna *lodräta.*

Ligger pelaren på en af fyrsidingarna så, att den gränsyta är vågrät, så äro de båda tresidingarna *l* *räta,* men de 2 öfriga fyrsidingarna äro hvarken v räta eller lodräta, utan hafva en *sned lutning.*

De två tresidingarna äro pelarens *grundytor,* de 3 fyrsidingarna dess *sidoytor.*

B. Kantlinierna.

Den regelbundna trekantiga pelaren har 9 *r* *kantlinier.*

Hvardera grundytan är omgifven af 3 *lika st* kantlinier. De båda grundytorna äro således *liksid* *tresidingar.*

Den ena grundytans kantlinier äro lika stora n den andra grundytans kantlinier.

Hvardera sidoytan är omgifven af 4 kantlinier, hvilka de motstående äro *lika stora* och *jemnlöpa* (parallela). De tre sidoytorna äro *parallelogrammer*

Genom sina kantlinier står hvardera grundyta förbindelse med de 3 sidoytorna, och hvardera sidoy med de 4 öfriga gränsytorna.

Grundytornas 6 kantlinier äro *lika stora.* Hva kantlinie i den ena grundytan är *jemnlöpande* med kantlinie i den andra.

De 3 kantlinier, som endast tillhöra sidoytor äro *lika stora* och *jemnlöpande.* Hvar och en af d tillhör 2 sidoytor.

Står pelaren på en vågrät bordskifva, så hafv kantlinier en *vågrät,* och 3 en *lodrät* riktning. *Lig* pelaren på en vågrät bordskifva, så hafva 3 kantli en *vågrät* och 4 en *sned* riktning.

C. Kantvinklarna.

Den regelbundna trekantiga pelaren har 9 *kantvinklar*. Vid hvarje kantlinie ligger en kantvinkel.

Vid grundytornas kantlinier ligga 6 *lika stora* kantvinklar. Hvardera af dem bildas derigenom att en grundyta sammanträffar med en sidoyta. Dessa 6 kantvinklar äro *räta*.

De 3 öfriga kantvinklarna ligga vid de kantlinier, som endast tillhöra sidoytorna. Hvardera af dem bildas derigenom, att 2 sidoytor sammanträffa. De äro *lika stora* med hvarandra och *spetsiga*.

En kantvinkel, som är *mindre än en rät*, kallas *spetsig*.

Sidoytorna hafva samma lutning mot grundytorna. De hafva äfven samma lutning mot hvarandra.

D. Vinklarna.

Hvarje tresiding har 3 (linie-) vinklar, hvarje fyrsiding 4.

Den regelbundna trekantiga pelaren har 18 vinklar. Hvardera af dem bildas derigenom, att två kantlinier sammanträffa i en punkt.

En vinkel, som är mindre än en rät, kallas *spetsig*.

De 6 vinklarna i grundytorna äro lika stora *spetsiga* vinklar.

Alla *liksidiga* tresidingar äro äfven *likvinkliga*.

(Linie-) Vinklarna i grundytorna bestämma de spetsiga kantvinklarnas storlek.

Sidoytornas 12 vinklar äro *räta vinklar*.

Rätvinkliga parallelogrammer kallas *rektanglar*.

Den regelbundna trekantiga pelarens *sidoytor* rektanglar.

E. Hörnen.

Den regelbundna trekantiga pelaren har 6 hö som alla hafva *samma form och storlek.*

I hvardera hörnet sammanträffa 3 gränsytor, kantlinier, 3 kantvinklar och 3 (linie-) vinklar.

Af de gränsytor, kantlinier, kant- och linie-vink som sammanträffa i hvarje hörn, äro 2 af hvardera s get lika stora med hvarandra; af vinklarna (kant- linie-) äro 2 *räta* och 1 *spetsig.*

Står pelaren, så ligga 3 hörn nedåt och 3 upp *Ligger* den, så äro 4 hörn nedåt och 2 uppåt.

F. Axlarna.

Den regelbundna trekantiga pelaren har 1 *yta* som finnes, om man tänker sig en rät linie dragen nom pelaren emellan de punkter i grundytorna, som till samma afstånd från grundytornas 3 vinkelspetsa

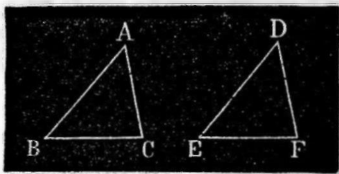
En rät linie, som drages (tänkes dragen) ge pelaren från midtelpunkten af en sidokantlinie till m telpunkten af den motstående sidoytan, kallas en *ka yt-axel.*

Den regelbundna trekantiga pelaren har 3 *ka yt-axlar.*

En rät linie, som drages (tänkes dragen) ge pelaren från ett hörn till midtelpunkten af den m stående kantlinien i motsatta grundytan, kallas en *hö kant-axel.*

Den regelbundna trekantiga pelaren har 6 *hö kant-axlar.*

Alla axlarna skära hvarandra i en punkt i inuti pelaren.



36. Lärosats. *Om två vinklar* ABC, ACB *och mellanliggande sidan* BC *i en tresiding* ABC *äro lika stora med hvar sin af två vinklar* DEF, DFE *och mellanliggande sidan* EF *i en annan tresiding* DEF, *så äro de båda tresidingarna* ABC *och* DEF *sammanfallande.*

1. Huru många tresidingar äro gifna? — Hvad förutsätter man om dessa tresidingar?

2. Om man föreställer sig, att tresidingen DEF lägges på ABC så, att punkten E faller på B och riktningarna af EF och BC sammanfalla, hvar faller då ändpunkten F (5 a)?

3. Då vinkelspetsarna B och E och ett par vinkelben BC och EF af de två lika stora vinklarna ABC och DEF sammanfalla, hvart faller det andra vinkelbenet ED (15)? — Då vinkelspetsarna C och F och vinkelbenen BC och EF af de två lika stora vinklarna ABC och DFE sammanfalla, hvart faller det andra vinkelbenet FD (15)?

4. Då riktningarna af ED och FD sammanfalla med riktningarna af BA och CA, hvarmed måste de förra liniernas skärningspunkt D sammanfalla (4)?

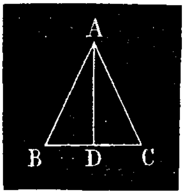
5. Då således alla sidor och vinklar i båda tresidingarna sammanfalla, hurudana måste tresidingarna vara (34)?

Slutföljd.

a. *Om två tresidingar hafva ett par sidor och två par motsvarande vinklar lika stora, så äro de båda tresidingarna sammanfallande.*

De lika stora vinkelparen behöfva icke båda ligga invid de lika stora sidorna, om blott de vinklar, som äro lika stora, stå emot lika stora sidor.

1. Huru stor är summan sf alla 3 vinklarn hvarje tresiding (32)? — Om 2 vinklar i en tresid äro lika stora med 2 vinklar i en annan tresiding, rudana äro de återstående vinklarna?



37. Lärosats. *Om två si* AB *och* AC *i en tresiding* ABC *lika stora, så äro äfven de mot d sidor stående vinklarna* ABC *och* A *lika stora.*

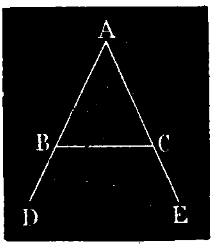
1. Hurudan är den gifna tresi gen?

2. Om man föreställer sig en rät linie AD dra så, att den delar vinkeln BAC midt i tu (26), i h många tresidingar blir den gifna tresidingen ABC del

3. Hvilka sidor i tresidingen ACD äro lika s med sidorna BA och AD i tresidingen ABD? — dessutom mellanliggande vinklarna BAD och DAC lika stora, hurudana måste tresidingarna ABD och A vara (35)?

4. Emedan i sammanfallande tresidingar lika kelpar stå mot lika sidopar (34 c), med hvilken vi måste vinkeln ABD vara lika stor?

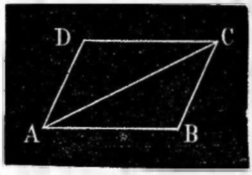
Slutföljder.



a. *Om man förlänger de l lika stora sidorna* AB *och* A *en likbent tresiding* ABC *utö den tredje sidan (grundsidan) äro äfven vinklarna* DBC *och* I *nedanför grundsidan lika stora*

Hur stor är summan af vink na ABC och DBC (22)? — af v larna ACB och BCE? — Om man från dessa lika s

Hvilka sidor och vinklar äro lika stora i de två sammanfallande tresidingarna ABC och ADC (34 c)? — Då vinkeln BAC är lika stor med ACD, och CAD är lika stor med ACB, med hvilken vinkel är BAD lika stor (17)?



56. Lärosats. *Om en fyrsiding* ABCD *har de motstående sidorna lika stora,* AB = DC *och* AD = BC, *så är den en parallelogram.*

1. Hvad förutsätter man? — Hvad påstår man?

2. Om diagonalen AC drages, hvilka tresidingar uppkomma? — Hvilka sidor i tresidingen ABC äro lika stora med motsvarande sidor i tresidingen ADC? — Hurudana äro till följd deraf de båda tresidingarna (39)?

3. Hvilka vinklar äro lika stora i dessa båda sammanfallande tresidingar (34 c)?

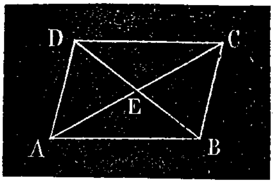
4. Då vinkeln BAC är lika stor med ACD, hurudana äro räta linierna AB och DC (29 *C*)? — Då vinkeln DAC är lika stor med ACB, hurudana äro linierna AD och BC (29 *C*)?

5. Hvilka fyrsidingar äro parallelogrammer (53)? — Hurudan fyrsiding är således ABCD?

Slutföljder.

a. *Om de motstående sidorna i en fyrsiding äro lika stora, så äro äfven de motstående vinklarna lika stora.*

b. *Två parallelogrammer äro sammanfallande* (af samma form och storlek), *om de hafva två närliggande sidor och den mellanliggande vinkeln lika stora.*

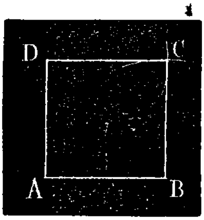


57. Lärosats. *I en p rallelogram* ABCD *skära båda diagonalerna* AC *och* E *hvarandra midt i tu.*

1. Huru indelar man fy sidingar? — Till hvad sl hör den gifna figuren ABCD? — Huru många diagon ler äro gifna? — I hvilken punkt skära diagonaler hvarandra? — I huru många delar blir hvardera diag nalen delad? — Hvilka äro dessa delar? — Hvad p står man om de båda delarna af hvardera diagonale:

2. Är någon sida i tresidingen AEB lika stor m någon sida i tresidingen DEC (55 a)? — Äro AB och I jemnlöpande (53)? — Hvilka vinklar äro alternatvinkl (27)? — Hurudana äro dessa alternatvinklar (28 *C*)?

3. Då tresidingarna AEB och DEC hafva hv sina två vinklar och mellanliggande sidor lika sto hurudana äro tresidingarna (36)? — Hvilka äro de ö riga lika stora sidorna i dessa tresidingar (34 c)?



58. Uppgift. *Att på en gi ven rät linie* AB *uppritta en qvadra*

Hvad menas med en qvadrat (53 a

Upplösning. Drag från punkten en linie vinkelrät mot AB (verkställ enligt 49, sedan AB blifvit utdrag på andra sidan om A, eller ock m tillhjelp af gradskifvan eller den rätvinkliga *vinkelhaker* gör AD lika stor med AB, uppdrag från D och B m radien AB cirkelbågar, som skära hvarandra i C, o drag räta linierna CD och CB!

1. Hurudana äro de 4 sidorna i den uppritade fy sidingen? — Hvarföre äro de lika stora?

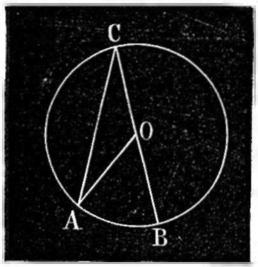
medelpunktsvinkeln hörande kordan och bågen i 2 lika stora delar.

Hurudana äro tresidingarna AOC och BOC (35)? — Hvad följer deraf?

---

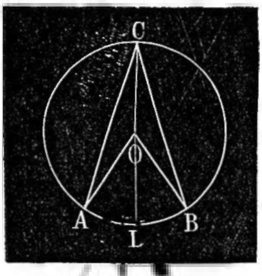
86. Lärosats. *Om vinkeln* AOB *står vid medelpunkten i en cirkel, och vinkeln* ACB *vid omkretsen på samma båge* AB, *så är* AOB *dubbelt så stor som* ACB.

Vinkeln ACB kan hafva 3 olika lägen i anseende till vinkeln AOB.



1:o. *Medelpunkten* O *kan ligga på vinkelbenet* CB.

1. Hurudana äro sidorna OA och OC i tresidingen AOC? — Hurudana äro således vinklarna OAC och OCA (37)? — Huru stor är den yttre vinkeln AOB (33)? — Då vidare OAC och OCA äro lika stora, huru mångfaldig är vinkeln AOB af ACB (19)?

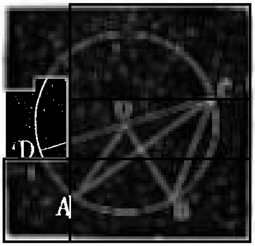


2:o. *Medelpunkten* O *kan ligga inom vinkelns* ACB *båda ben.*

1. Om tvärlinien CD drages, hurudan tresiding är AOC? — Hurudana äro vinklarna CAO och ACO (37)? — Huru stor är den yttre vinkeln AOD (33)? — Huru mångfaldig är vinkeln AOD af vinkeln ACO (19)?

2. Hurudan tresiding är BOC? — Hurudana äro vinklarna CBO och BCO (37)? — Huru stor är den yttre vinkeln BOD (33)? — Huru mångfaldig är vinkeln BOD af vinkeln BCO (19)?

3. Då nu äfven AOD är dubbelt så stor, som ACD, huru mångfaldig är vinkeln AOB af ACB?



3:o. *Medelpunkten O kan ligga utom vinkelns ACB ben.*

1. Om diametern CD drages, hvilka 2 sidor i tresidingen COB äro lika stora med hvarandra? — Hurudana äro vinklarna OCB och OBC (37)? — Huru stor är den yttre vinkeln DOB (33)? — Huru mångfaldig är vinkeln DOB af vinkeln DCB (19)?

2. Hvilka 2 sidor i tresidingen OCA äro lika stora med hvarandra? — Hurudana äro vinklarna OCA och OAC (37)? — Huru stor är den yttre vinkeln DOA (33)? — Huru mångfaldig är DOA af DCA (19)?

3. Då hela vinkeln DOB är dubbelt så stor, som hela vinkeln DCB, och en del DOA af den förra är dubbelt så stor, som en del DCA af den senare; huru mångfaldig är den förras återstående del AOB af den senares återstående del ACB?

Slutföljder.

a. *Emedan medelpunktsvinkeln mätes af den båge, på hvilken han står, så mätes omkretsvinkeln af halfva den båge, på hvilken han står.*

b. *Omkretsvinklar, som stå på samma båge, äro lika stora.* Ty hvardera är hälften af samma medelpunktsvinkel.

c. *Omkretsvinklar, som stå på lika stora bågar i samma eller i lika stora cirklar, äro lika stora.* Ty de äro båda hälften af lika stora medelpunktsvinklar (84).

d. *I samma eller lika stora cirklar stå lika stora omkretsvinklar på lika stora bågar.*

6. Huru stort är kubikinnehållet af en fyrkantig och rätvinklig bjelke, som är $\frac{1}{2}$ fot bred, $\frac{3}{4}$ fot tjock och 12 fot lång? *Sv.* $4\frac{1}{2}$ kubikfot.

7. Hvad är kubikinnehållet af en rät vals, som är 3 fot hög, och hvilkens grundytor har 1 fots tvärlinie?

Grundytan är 3,14. 1. 0,25 = 0,785 qv.fot.

Valsens kubikinnehåll 3. 0,785 = 2,355 kubikfot = 2 kub.fot 355 kub.tum.

---

102. Uppgift. *Att beräkna rymden af en pyramid och af en käggla.*

Anm. Hvar och en pyramid eller käggla (fig. 97, 98) är tredjedelen af en pelare, som har lika stor grundyta och höjd, som den.

Rymden af en pyramid eller af en käggla erhålles således, om man multiplicerar grundytans storlek, uttryckt i något visst qvadratmått, med höjdens storlek, uttryckt i motsvarande längdmått, och dividerar produkten med 3.

1. Huru stor är rymden af en käggla, hvilkens höjd är 6 tum, och grundytans tvärlinie 3 tum?

Grundytan är 3,14. 3. 0,75 = 7,065 qv.tum.

Kägglans rymd $\frac{6.\ 7,065}{3}$ = 14,13 kub.tum = 14 kub.tum 130 kub.lin.

---

103. Uppgift. *Att beräkna rymden af de regelbundna kropparna.*

Fyrplaningen (fig. 99), är en trekantig pyramid, hvilkens rymd vi redan lärt beräkna (102).

Åttaplaningen (fig. 100) kan sönderdelas i 8 lika stora pyramider, af hvilka hvardera har en af åttaplaningens gränsytor till grundyta och halfva ytaxeln till höjd. Alla 8 pyramiderna sammanträffa med spetsarna på midten af ytaxeln.

Man beräknar således en af dessa pyramider och tager dess innehåll 8 gånger, eller man multiplicerar hela ytinnehållet med halfva ytaxeln, och tager tredjedelen af denna produkt.

Samma anmärkning gäller om tolfplaningen och tjugoplaningen (fig. 101 och 102).

Anm. För att mäta ytaxeln lägger man den regelbundna kroppen på en vågrät bordskifva, lägger en annan vågrät skifva på den uppåt vända vågräta ytan af kroppen, så att skifvan sträcker sig utom kroppen, och mäter det lodräta afståndet mellan denna skifva och bordet. Detta afstånd utgör ytaxelns längd.

---

104. Uppgift. *Att beräkna rymden af ett klot* (fig. 103).

Klotet kan anses sammansatt af ett mycket stort antal pyramider, hvilkas spetsar sammanträffa i klotets medelpunkt, och hvilkas grundytor tillsammans utgöra klotets bugtiga yta.

Rymden af ett klot erhålles således, om man multiplicerar klotets ytinnehåll (99), uttryckt i något visst qvadratmått, med dess radie, uttryckt i motsvarande längdmått, och tager tredjedelen af denna produkt.

Hvad är kubikinnehållet af ett klot, hvars tvärlinie är 6 tum?

Klotets ytinnehåll är $4.\ 6.\ 3{,}14.\ 1{,}5 = 113{,}04$ qv.tum = 1 qv.fot 13 qv.tum 4 qv.lin.

Klotets kubikinnehåll $\frac{113{,}04.\ 3}{3} = 113{,}04$ kubiktum = 113 kubiktum 40 kubiklinier.

Blandade räknefrågor.

1. Huru stor är ytan af en cirkel, hvars tvärlinie är 6 tum 4 lin.? *Sv.* 32 qv.tum 15,36 qv.lin.

2. Huru stor är radien till en cirkel, hvars omkrets är 21 fot 9 tum 8 lin.? *Sv.* 3 fot 5 tum.

3. Huru stor är *a)* ytan och *b)* rymden af en tärning, hvars kantlinie är 5 fot 4 tum? *Sv.* *a)* 174 qv.fot 96 qv.tum. *b)* 157 kub.fot 464 kub.tum.

4. Huru stor är bugtiga ytan af en rät vals, hvars radie är 1 fot 5 tum och höjd 15 fot 4 tum? Sv. 145 qv.fot 6 qv.tum 80 qv.linier.