

Huvudräkningstyper.

(Massundersökning.)

Av

K. G. JONSSON.

I denna tidskrift har jag tidigare¹ redogjort för vissa räknepsykologiska undersökningar, varvid särskilt huvudräkning i addition (men även i subtraktion, multiplikation och division) behandlats. Därvid påvisades, hurusom åtskilliga typförfaranden användes av de räknande. En kort exemplifiering av de typiska tillvägagångssätten torde kanske vara nödvändig.

Addition (27 + 48):

- 1) $27 + 3 = 30$; $48 - 3 = 45$; $30 + 45 = 75$. (U-typ.²)
- 2) $27 + 40 = 67$; $67 + 8 = 75$. (VI-typ.)
- 3) $20 + 40 = 60$; $7 + 8 = 15$; $60 + 15 = 75$. (VII-typ.)

Subtraktion (83 - 37):

- 1) $37 - 3 = 34$; $80 - 4 = 76$; $76 - 30 = 46$.³
Från 37 till 40 = 3; från 40 till 80 = 40; 3 + 40 = 43;
från 80 till 83 = 3; 43 + 3 = 46.
- 2) $83 - 30 = 53$; $53 - 7 = 46$.

¹ Band III, 1915. (Individuella räknetyper.)

² Angående benämningarna och andra förhållanden hänvisas till min tidigare uppsats.

³ Detta förfaringssätt har ej förekommit fullt rent och f. ö. ytterst sparsamt i denna massundersökning.

- 3) $80 - 30 = 50$; $13 - 7 = 6$ (ett tiotal tages från 50 eller redan förut från 80); ... 46.

Multiplikation:

- 1) Sätt, *icke* likt det vid skriftlig räkning använda.
 2) » » » » » » »

Division:

- 1) Sätt, *icke* likt det vid skriftlig räkning använda.
 2) » » » » » » »

I de omnämnda tidigare undersökningarna deltog endast 12 försökspersoner.¹ För att utröna i hur stor utsträckning de olika tillvägagångssätten i huvudräkning användas i våra barndomsskolor, anordnades en massundersökning av barn, tillhörande Kristinehamns och Stockholms folkskolor. Antalet undersökta barn utgjorde 974, därav 786 från Kristinehamn och 188 från Stockholm, 496 gossar och 478 flickor. Undersökningen har omfattat barn från och med 2:a till och med 7:e skolåret, ungefär lika många i varje årsklass. Nybörjarna (1:a skolåret) ha ej kunnat bli föremål för undersökningar av denna art, enär de helt naturligt ej äro tillräckligt försigkomna på området i fråga.

Nu är ju klart, att en undersökning av ett så betydande antal fprer ej kunnat göras av mig ensam, varför lärarna vid de olika skolorna måst anlitas. 30 st. klasslärare ha verkställt de nödiga undersökningarna, var och en i sin avdelning. Härvid hade de att ifylla utlämnade blanketter, där barnets klassnummer, tillvägagångssätt vid huvudräkning i de olika räknesätten på förut avhandlat område, begåvning i räkning och i allmänhet samt innanläsningsfärdighet (förmåga att läsa flytande) skulle antecknas. Vidare skulle undervisningssättet vid huvudräkning angivas. I en anmärkningskolumn skulle vederbörande lärare nedteckna ett och annat, som kunde vara av värde, t. ex. förfaringssätt, som ej stämde överens med de förut anförda typerna. I ett instruktionsföredrag insattes lärarna väl i huru de skulle gå till väga. Särskilt be-

¹ Hädanefter användes för försöksperson beteckningen fpr.

tonades, att ingen som helst påverkan från lärarens sida finge förekomma under undersökningarnas gång, samt att flera exempel skulle föreläggas (såväl akustiskt som optiskt), så att fpna skulle komma in i sitt speciella förfaringssätt, om nu något sådant verkligen förefanns.

Nedanstående siffror ange, i vilken utsträckning de olika förfaringssätten ha använts.¹

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \% ; a_2 = 43 \% ; a_3 = 55 \% . \\ s_1 &= 7 \text{ »} ; s_2 = 56 \text{ »} ; s_3 = 37 \text{ »} . \\ m_1 &= 79 \text{ »} ; m_2 = 21 \text{ »} . \\ d_1 &= 43 \text{ »} ; d_2 = 57 \text{ »} . \end{aligned}$$

Små variationer ha naturligtvis förekommit hos en del fpnr. I sådana fall ha fpna förts till den typ, de tydligt liknat. I en del fall har dock förfaringssättet ej varit utpräglat eller bestämbar, varför ett mindretal fpnr ej kommit med i de nyss anförda procent-siffrorna. De allra flesta av dessa fpnr ha tillhört den lägsta åldersklassen. Någon väsentlig skillnad i fråga om gossar och flickor har ej kunnat iaktas, varför något särskiljande beträffande kön ej gjorts.

Betrakta vi fördelningen i fråga om *addition*, se vi, att ett försvinnande litet antal använt sig av a_1 -sättet. Endast 2 % (runt tal) höra hit. Att denna grupp blivit så liten beror nog på, att ingen lärare i större utsträckning vid undervisningen använt sig av detta sätt. Under 1:a skolåret har dock naturligtvis räkningen ofta skett enligt detta sätt. Men nästan alla ha sedan kastat bort det och använt andra. a_2 -sättet har kommit till användning i långt större utsträckning. De allra flesta räkna dock enl. a_3 -sättet.

I *subtraktion* ha 7 % använt sig av s_1 -sättet, som ju motsvarar a_1 -sättet i addition. Även här således ett ringa antal. De flesta räkna enl. s_2 -sättet; en dryg tredjedel använder sig dock av s_3 -sättet.

¹ För korthetens skull användas härnäst följande beteckningar:
 a_1, a_2 och a_3 = resp förfaringssätt i addition (se sid. 47);
 s_1, s_2 » s_3 = » » » subtraktion (se sid. 47—48);
 m_1 » m_2 = » » » multiplikation (se sid. 48);
 d_1 » d_2 = » » » division (se sid. 48).

Som väntat var, använda sig de flesta av vanligt huvudräkningssätt i *multiplikation* (ex. $4 \cdot 12 = 4 \cdot 10 = 40$; $4 \cdot 2 = 8$; $40 + 8 = 48$). 21 % förfara dock som vid skriftlig räkning.

Beträffande *division* återfinnas de flesta (57 %) bland dem, som gå tillväga på samma sätt som vid skriftlig räkning. De, som använda sig av d_1 -sättet, äro dock förvånande många.

Skulle man följa majoriteten bland dessa f_{nr} , skulle man således räkna enl. a_3 , s_3 , m_1 och d_2 i resp. räknesätt.

Vad så de olika tillvägagångssättens fördelning å åldersstadierna beträffar kan nämnas, att a_1 -sättet användes mer i de lägsta klasserna än i de högre. Detta är ock naturligt, enär förfaringssättet i regel användes vid undervisningen under första skolåret. Förfaringssättet enl. a_3 kommer också till användning långt mera bland de yngre. Under det att 2:a skolåret har 82 %, komma de tre sista upp endast till omkring 20 %. Tvärtom förhåller det sig med dem, som räkna enl. a_3 . Här ökas procentsiffran stadigt med tilltagande ålder. Till denna grupp ha också förts de få räknare, som förfarit som vid skriftlig räkning. Av de anförda tillvägagångssätten liknar ju också a_3 mest det skriftliga.

I subtraktion har s_1 -sättet (motsvarande a_1 i addition) fallande procentsiffror. Även i fråga om s_2 , som dock är det i genomsnitt mest frekventerade inom detta räknesätt, sjunka siffrorna i de högre klasserna. Under det att s_2 användes av över 80 % av barn i 2:a skolåret, sjunka siffrorna till omkring 40 för de högre klasserna. Ett motsatt förhållande är rådande beträffande s_3 . Ifrån att procentsiffran för 2:a skolåret är 3, ökas den tämligen jämnt upp till över 60 för det 7:e.

I multiplikation är ju m_2 ej mycket använt. (Genomsnittsprocentsiffran = 21.) Emellertid går siffran för 3:e skolåret upp till 35. Att den blivit så hög här torde bero på att f_{pn} , strax efter det de lärt sig den skriftliga räkningen, i högre grad än eljest hängett sig åt detta tillvägagångssätt även vid huvudräkning.

Detta förhållande ger sig ännu tydligare tillkänna i division. Där användes det icke skriftliga förfaringssättet av ej mindre än 98 % i den 1:a åldersgruppen. Men i påföljande åldersgrupp är förhållandet alldeles omkastat. De jämförelsevis svårhanterliga di-

visionsuppgifterna lösas av hithörande fpnr nästan uteslutande enl. d_2 . Längre fram synas dock fpna i rätt stor utsträckning återgå till d_1 och detta allt mer i de högre åldersstadierna. Genomsnittsprocenten för d_2 blir ej heller så hög, endast drygt hälften använder sig av detsamma. Detta avviker rätt betydligt från de resultat, jag erhöll vid undersökningar av samma art för några år sedan. Procentsiffran för d_2 blev då betydligt större. Denna olikhet är så mycket mer anmärkningsvärd, som denna och föregående undersökning i övrigt i huvudsak givit alldeles samma resultat. Undervisningssättet torde härvidlag ha spelat in.

Redan förut har framhållits, att ett visst samband mellan tillvägagångssätten i addition och subtraktion förefinnes. Så motsvara a_1 , a_2 och a_3 resp. s_1 , s_2 och s_3 . Även i fråga om multiplikation och division har ett sådant samband kunnat spåras. Beräkningarna angående denna sak visa, att ej mindre än 86 % av dem, som använda sig av a_1 i addition, också räkna enl. s_1 i subtraktion. En tydlig korrelation således. Ungefär lika stor procent av dem, som gå tillväga enl. a_2 , räkna även enl. s_2 . Procentsiffran för $a_3 - s_3$ är ock tämligen hög. Men så motsvara också nämnda resp. tillvägagångssätt varandra. (Se sid. 47—48.) Även i fråga om förfaringssätten i multiplikation och division förefinnes tydlig korrelation. Så ha nästan alla fpnr, som i multiplikation räknat enl. m_1 , i division gått tillväga enl. d_2 . De antaganden, som i min förra uppsats (sid. 190, Band III, 1915) gjorts angående sambandet mellan additions- och subtraktionstyper, ha i allo bekräftats. Vidare har denna massundersökning givit som resultat, att en tydlig korrelation äger rum mellan motsvarande typer i multiplikation och division.

Kan då något samband mellan tillvägagångssätt i samtliga räknesätten påvisas? Av dessa undersökningar framgår, att en stor procent av fpna räknar enl. $a_1 - s_1 - m_1 - d_1$, $a_2 - s_2 - m_1 - d_1$ och $a_3 - s_3 - m_2 - d_2$ resp., d. v. s. många fpnr använda sig av resp. anförda sätt i de olika räknesätten.

Man ser således, att fpna med förkärlek använt sig av tillvägagångssätt, som motsvara varandra. Detta är också naturligt, då räknearbetet härigenom betydligt underlättas. Det kan också vara

ett bevis för att fpna i stor utsträckning använda sig av det sätt, där minsta motståndet möter, och där de förmodligen komma fortast fram. Ty därigenom att likartade förfaringssätt användas, erhålles mera träning i fråga om de nödvändiga deloperationerna. Härigenom drives mekaniseringen till större fulländning, energiförbrukningen blir ej så stor, det hela går ledigare och snabbare.

Hur pass tillförlitliga äro då de siffror, de resultat, som här förut anförts? Med hur stor säkerhet ha de resp. lär. kunnat bestämman sina elevers tillvägagångssätt i huvudräkning? Det är inte alldeles så lätt att göra fullt riktiga bestämningar i detta avseende. Ty, som förut påpekats, man kan inte efter några enstaka exempels lösande av fpn få fram ett tillförlitligt resultat. Innan fpn kommit in i sitt vanliga tillvägagångssätt, blir det ofta ena gången så och andra gången på ett annat sätt. Vidare böra undersökningarna fördelas på olika tider. Det är sålunda ej så litet arbete, som måste nedläggas, om man skall någorlunda säkert utröna, hur det ställer sig i ifrågavarande avseende. Emellertid har jag all anledning att tro, att resp. klasslär. nedlagt ett intresserat och omsorgsfullt arbete. Däröfver vittna de många anteckningarna i anmärkningskolumnen, anteckningar angående många gånger mycket små skiftningar i tillvägagångssätt o. d. De goda resultaten av de av mig efteråt företagna kvalitetsundersökningarna (varvid även undersökningar beträffande minne, föreställningssätt, uppmärksamhet o. s. v. företogs) ge vid handen, att de av klasslär. verkställda undersökningarna utförts väl. Emellertid är det inte meningen att påstå, att alla de siffror, som erhållits, äro absolut säkra. Jag har därför i denna uppsats anført endast några få och ungefärliga siffror. Av samma anledning har inte heller en utförd mera vidlyftig korrelationsräkning medtagits. Det anförda torde vara tillräckligt för att påvisa, vad som verkligen kan påvisas.

Av de 30 klasslär. har ingen uteslutande använt sig av ett visst förfaringssätt vid undervisningen i huvudräkning. För öfrigt bedrives ej huvudräkning så särdeles mycket. Några lär. ha dock angivit, att de företrädesvis använda sig av ett särskilt typförfarande vid sin undervisning. Så ha 11, 11, 17 och 12 lär. angivit (för addition, subtraktion, multiplikation och division resp.), att de

företrädesvis använt sig av ett visst sätt. Medelprocentens för tillvägagångssätten hos de barn, som undervisats av dessa lär., avvikelse från motsvarande medelprocent för samtliga fpnr varierar mellan $+18$ och -1 . (Ar frekvensprocenten högre för de på särskilt sätt undervisade, sättes $+$, i annat fall $-$). Av siffrorna framgår, som var att vänta, att undervisningssättet har avsevärd inverkan på lärjungarnas sätt att gå till väga. Medelprocenten för ett visst sätt har så gott som överallt blivit högre för de fpnr, som erhållit undervisning enl. detta sätt. Emellertid kunde man kanske ha väntat, att lärjungarna skulle ha ännu mer följt den väg, som utstakats vid undervisningen.

Klasslär. ha också angivit graden av begåvning i räkning och allmän begåvning för fpna. Att dessa bestämningar äro rätt så tillförlitliga, torde vara visst. För begåvning, såväl i räkning som i allmänhet, ha använts beteckningarna 1, 2 och 3, där 2 betyder medelmåttig, 1 under och 3 över medelmåttan. Från början må anmärkas, att begåvning i räkning och begåvning i allmänhet troget följts åt. Enstaka undantag finnas dock.

Finns det då något samband mellan räknetyp å ena sidan och begåvning å den andra? Använda sig de mera begåvade företrädesvis av ett visst tillvägagångssätt, mindre begåvade av ett annat? Några resultat angående detta förhållande må anföras. Av de till a_1 hörande fpna ha mer än 80 % betecknats med siffran 1. I fråga om s_1 gäller ungefär detsamma. Omkring 70 % av dithörande räknare ha hänförts till den sämsta begåvningsgruppen. Beträffande a_2 , a_3 , s_2 och s_3 ställer sig saken annorlunda. Procenten mindre begåvade håller sig här omkring 20. Här har begåvningen i räkning tagits i betraktande, men med de avrundningar, som gjorts, gäller det anförda, även om allmänbegåvningen lägges till grund. Ta vi så de mestbegåvade i betraktande, finna vi, att endast 4 å 5 % av de till a_1 och s_1 hörande fpna höra hit. I fråga om de övriga tillvägagångssätten i addition och subtraktion, a_2 och a_3 samt s_2 och s_3 , varierar motsvarande procentsiffra mellan 12 och 19.

Det ser således ut, som om a_1 och s_1 skulle vara mera primitiva tillvägagångssätt, sätt, som användas av sådana fpnr, som ej orka med något annat. Nu användes, som förut framhållits,

vanligen a_1 åtminstone under 1:a skolåret vid räkneundervisningen, och det synes, som om många av de mindrebegåvade inte kunna höja sig från denna ståndpunkt. För övrigt hänvisas till min tidigare uppsats, där dessa sakförhållanden behandlas. Resultaten från denna massundersökning bekräfta, vad som där antogs.

De bästa begåvningarna återfinnas särskilt bland dem, som använda sig av a_3 och s_3 . Man skulle möjligen härav kunna dra den slutsatsen, att dessa tillvägagångssätt bäst passa de begåvade f_{pna} . Dessa ha kanske bättre förmåga att överblicka uppgifterna och lösa dem i ett slag. Mindre begåvade behöva gå mera stegvis framåt. Då det nu gäller att komma fram så fort som möjligt, användes oftast det sätt, som tar minsta tiden, då det nu behärskas.

Enligt min tidigare uppsats kunde intet egentligt sammanhang mellan räknetyper och föreställningstyper iakttagas hos de i föregående undersökning deltagande f_{pna} . Hos de till massundersökningen hörande, som av mig undersökts (kvalitetsundersökning), har dock en viss relation kunnat förmärkas, om också inte så tydligt. Det har framgått, att bland dessa f_{pnr} de övervägande visuella företrädesvis använt sig av de sätt, som mest likna skriftlig räkning, d. v. s. a_3 , s_3 , m_2 och d_2 . Detta förefaller också ganska rimligt. Dessa f_{pnr} ha nämligen kunnat »se» uppgifterna »tecknade» eller »uppställda till uträkning» på sätt som användes vid skriftlig räkning.

I den föregående undersökningen kunde en tydlig korrelation räknetyper—uppmärksamhetstyper påvisas. Även om resultaten i fråga om massundersökningen ej ge vid handen, att ett så utomordentligt starkt samband äger rum härvidlag, framgår dock, även enl. denna senare undersökning, att ett sådant förefinnes. Särskilt a_1 och s_1 skulle höra samman med fixerande uppmärksamhetstyper, under det att a_3 och s_3 skulle höra ihop med mera rörlig typ av uppmärksamhet.

Som förut nämnts, angavs vid massundersökningen även f_{pna} s innanläsningsfärdighet (flytande läsning). Härvid ha f_{pna} sammanförts i tre grupper. De bästa ha betecknats med 3, de medelmåttiga med 2 och de sämsta med 1. Dessa bestämmningar ha naturligtvis gjorts av resp. klasslär., som ju också ägt god kännedom

om sina lärjungars ståndpunkt i detta hänseende. Här som i fråga om undersökningarna angående begåvningen kunna emellertid ej indelningarna av fpna i de tre grupperna undgå att i någon mån bli färgade av resp. lärarens individuella uppfattning. Som lär. vid instruktionen anmodades att i tveksamma fall hänföra fpna till mellangrupperna, torde dock samtliga de till yttergrupperna hörande vara relativt dåliga och bra läsare resp.

Av de till a_1 och s_1 hörande äro de flesta svaga läsare. Ej mindre än cirka 90 % ha betecknats med 1. Ett motsatt förhållande gör sig gällande i fråga om de till a_3 och s_3 hörande. Beträffande multiplikations- och divisionstyperna har ej något samband i berörda avseende kunnat påvisas.

Nu är ju sant, att en motsvarande korrelation kunnat förmärkas i fråga om begåvning och räknetyp. Så ha ju de till a_1 och s_1 hörande fpna varit i allmänhet klent begåvade; de flesta bästbegåvade ha återfunnits i a_3 - och s_3 -grupperna. Säkert är ju också, att de sämsta läsarna i allmänhet hittas bland de sämst begåvade. En korrelation mellan nämnda räknetyper och begåvning skulle således böra föra med sig en motsvarande korrelation räknetyp—innanläsningstyp. Men procenten har i senare fallet blivit avsevärt större, så att man kanske har skäl att antaga, att hos dessa fpnr ett samband — oavsett begåvningen — mellan tillvägagångssätt i räkning och innanläsningsfärdighet är rådande.

Ett samband mellan färdighetsgrad i innanläsning och uppmärksamhetstyp är ej heller otänkbart. För att läsningen skall kunna gå flytande, måste man vara en smula före med uppfattandet, d. v. s. medan man uttalar ett, måste man ögna igenom ett annat. Samma förhållande gör sig gällande vid spelning direkt från notbladet. För att spelningen skall kunna löpa jämnt framåt, måste den spelande, under det en takt spelas, läsa en takt eller så i förväg. Härvid händer dock, att det ibland erfordras att gå tillbaka till det som just spelas. Så ock vid vanlig läsning. Den dåliga läsningen karakteriseras i mångt och mycket av oförmåga att »läsa i förväg», och, om så behövs, att hastigt gå tillbaka till det som just utläses. Det fordras nog också jämförelsevis stort omfång hos uppmärksamheten för att läsningen skall bli flytande.

Om »blickfältet» ej är avsevärt större än »blickpunkten», blir väl kanske uppmärksamheten intensivt inriktad på det som just utläses, men övergången till nästa ord eller del därav sker ofta med paus, då ingenting är förberett genom läsande i förväg eller överblickande, varvid man fått en om än vag uppfattning av vad som följer. Nu ha ofta personer av fixerande uppmärksamhetstyp mindre omfång, mindre förmåga att överblicka ett större område. Om således en mera rörlig typ skulle passa bättre samman med flytande läsning, är det ej underligt, att en korrelation av angiven art mellan räkne- och innanläsningstyp kunnat förmärkas.

Massundersökningen har för övrigt givit ungefär samma resultat som den tidigare utförda. Några smärre avvikelser i fråga om sambandet mellan räknetyp å ena sidan samt föreställningssätt och uppmärksamhetstyp å den andra ha visserligen förekommit, men i stort sett ha dock, som sagt, undersökningarnas resultat i motsvarande delar blivit enahanda.