

Ansvar för matematiklärande

Ansvar för matematiklärande

Effekter av undervisningsansvar i det
flerspråkiga klassrummet

Åse Hansson



© Åse Hansson, 2011

ISBN 978-91-7346-711-7

ISSN 0436-1121

Fotograf: Ateljé Marie

Akademisk avhandling i ämnesdidaktik med inriktningar, vid Institutionen för didaktik och pedagogisk profession

Avhandlingen finns även i fulltext på

<http://hdl.handle.net/2077/26669>

Denna doktorsavhandling har genomförts inom ramen för forskarskolan i utbildningsvetenskap vid Centrum för utbildningsvetenskap och lärarforskning, Göteborgs universitet.

Centrum för utbildningsvetenskap och lärarforskning, CUL
Forskerskolan i utbildningsvetenskap
Doktorsavhandling 12

År 2004 inrättade Göteborgs universitet Centrum för utbildningsvetenskap och lärarforskning (CUL). CUL:s uppgift är att främja och stödja forskning och forskarutbildning med anknytning till läraryrket och lärarutbildningen. Forskerskolan är fakultetsövergripande och bedrivs i samarbete mellan de fakulteter som medverkar i lärarutbildningen vid Göteborgs universitet samt i samarbete med kommuner, skolhuvudmän och högskolor. www.cul.gu.se

Distribution: ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS
Box 222
SE-405 30 Göteborg, Sweden

Tryck: Kompendiet, Göteborg, 2011

*Till den som lärt mig mest om rättvisa och som bela sitt liv månat om
allas lika värde, till pappa Sten.*

Abstract

Title: Responsibility for mathematics learning. Effects of instructional responsibility in the multilingual classroom.

Language: Swedish with summary in English

Keywords: Mathematics teaching; responsibility for learning; multilingual classroom; pedagogical segregation; multilevel structural equation modelling.

ISBN: 978-91-7346-711-7

The aim of the thesis is to contribute to knowledge about crucial conditions for students' mathematics learning, and more specifically what role mathematics teaching plays in that process. Also taken into account is the effect of group composition in terms of family background or language skills, and also the relation between group composition and teaching design. The study is based on the assumption that it is essential for students' performances if the teacher in the multilingual classroom takes responsibility for key dimensions of mathematics teaching.

The study is a secondary analysis of TIMSS data from 2003 focusing on mathematics for Swedish students in 8th grade. Based on theories of learning and teaching have important dimensions of mathematics teaching for which the teacher should take responsibility been identified. It has then been investigated how these dimensions of responsibility for students' mathematics learning are related to achievement, and also how they are related to different group-compositions.

Unlike traditional models of mathematics teaching, the model developed in this study simultaneously highlights three dimensions of teacher's responsibility. The first dimension concerns teacher's responsibility to actively and openly support students in their mathematics learning by for example highlighting and explaining the mathematics content, questioning and conversing with students and organizing instruction so as to create conditions for interaction and various social activities. The second dimension concerns teacher's responsibility for handing over responsibility to the students for their own construction of knowledge by for example encouraging them to their own reflections and reasonings about mathematical problems. Finally, the third dimension concerns teacher's responsibility for highlighting the content relevant to the grade as object of teaching. The results show that when teachers through actively teaching and guidance take responsibility for students' mathematics learning it will affect the performances positively. The results also indicate that this is of particularly importance for students with weak skills in the language of instruction.

However, the results show that mathematics education in Sweden is characterized by pedagogical segregation. In groups where many students are likely to have great need of support, teachers take a less responsibility for students' learning than is done in other groups.

The thesis discusses that pedagogical segregation, and responsibility for mathematics learning put on students themselves, may have contributed to the negative knowledge development in mathematics in Sweden during the last decades.

Innehållsförteckning

Förord	
INLEDNING	13
Ansvar i matematikundervisningen	13
Övergripande syfte	17
Epistemologiska utgångspunkter	17
Avhandlingens disposition	20
BAKGRUND OCH TEORETISKT RAMVERK	21
Förändringar inom samhälle och utbildning	21
Etniska, demografiska och socioekonomiska förändringar	21
Förändrade matematikprestationer	24
Ökat elevansvar i matematikundervisningen	25
Matematikundervisning	30
Lära matematik	30
Lärarens stödjande funktion i lärprocessen	32
Undervisa matematik	35
Språkets roll i matematiklärandet	39
Matematikundervisning i det flerspråkiga klassrummet	43
Språkstödet i grundskolan	47
Matematikundervisningens effekter	48
Överensstämmelsen mellan Vygotskijs och Brousseaus teorier	53
Gruppsammansättning	62
Pedagogisk segregation	65
Sammanfattning	67
STUDIENS SYFTE, FORSKNINGSFRÅGOR OCH DESIGN	71
Syfte	71
Forskningsfrågor	71
Design	72
METOD OCH DATA	73
Metodval	73
Data	77
TIMSS 2003, teoretiskt ramverk	77
Variabler	78
Matematikundervisning	78
Elevbakgrund	79
Matematikttest	80
Hantering av bortfall	81
Konfirmatorisk faktoranalys och strukturell ekvationsmodellering	82

SAMMANFATTNING AV STUDIERNA	87
Resultat.....	87
Studie I	87
Studie II.....	91
Studie III	95
DISKUSSION OCH SLUTSATSER.....	99
Effekter av undervisningsansvar.....	100
Bakgrundsfaktorer	101
Undervisningsansvar	105
Pedagogisk segregation	111
Bakgrunds- och förklaringsfaktorers specifika relevans för matematikundervisning.....	114
Metodfrågor och validitet.....	119
Implikationer.....	123
Matematikdidaktiska konsekvenser.....	123
Implikationer för TIMSS-data	124
Förslag till fortsatt forskning	126
Slutsats	127
SUMMARY	129
Introduction	129
The overall aim	130
Epistemological perspectives	130
Background and theoretical framing	131
Study object, research questions and design	132
Method and data.....	133
Summary of the studies	134
Study I.....	134
Study II	135
Study III.....	135
Discussion and conclusion	136
REFERENSER	139
Studie I - III	

Förord

Att efter flera års arbete med en avhandling försöka beskriva arbetsprocessen är en utmaning. Vad som fick mig att gå in i projektet är i dag överskuggat av nya intryck och upplevelser och till själva avhandlingsarbetet har jag ännu inte någon distans. Men jag gör ändå ett försök.

Efter många år som matematiklärare och lärarutbildare hade frågorna snarare än svaren hopats kring matematiklärandets villkor när jag 2006 blev antagen till forskarskolan CUL (Centrum för Utbildningsvetenskap och Läraforskning). Varför försämras de svenska elevernas matematikresultat? Varför har det blivit allt större spridning mellan olika elevers resultat? Varför lyckas inte matematikundervisningen möta de flerspråkiga elevernas behov? Vilka blir effekterna av allt för mycket "eget arbete" i matematik? Vilka är framgångsfaktorerna i matematikundervisning i flerspråkiga klassrum? Hur uppnår vi målet med likvärdig matematikundervisning? Varför...? Helt naturligt kom den första tiden i avhandlingsprojektet att domineras av en smärtsam avgränsning av mitt syfte med undersökningen. Helst hade jag velat svara på alla frågor, nu när jag hade chansen! Denna process med precisering av forskningsfrågan ledde mig emellertid fram till en central frågeställning: vad innebär det att ta ansvar för barns matematiklärande och vilken betydelse har detta ansvar? Det finns många bottenar i denna fråga och alla kändes viktiga att belysa. Frågan berör motivet med matematikundervisning - varför elever över huvud taget skall lära sig matematik, den berör rättvisaspekter - hur matematikundervisningen kan möta alla elevers olika behov av stöd och den berör själva utformningen av undervisningen.

Självklart har jag inte varit ensam i denna process. Min huvudhandledare Jan-Eric Gustafsson lät mig till att börja med sväva ut i alla de rymder dit entusiasmen tog mig, men ledde mig sedan med varsam hand in på allt smalare stigar. Min biträdande handledare Jonas Emanuelsson lät mig med sin analytiska skärpa förstå att skulle den här avhandlingen producera något kunskapstillskott så måste jag hitta ett tydligt fokus. Jan-Erics enorma kunskap och erfarenhet kring metodfrågor har inneburit att jag också fått den bästa tänkbara handledningen i konsten att svara på min forskningsfråga. Med tålamod har Jan-Eric även gett konstruktiv återkoppling på alla mina analyser och allt jag skrivit. Jonas har sparat upp punkter som varit kritiska för olika vägval i mitt arbete. Ensamtiderna har trots denna fantastiska support varit åtskilliga. Sedan projektet startade 2006 har jag många gånger svävat mellan hopp och förtvivlan då jag på min kammare varit nära att drunkna i floden av statistiska modeller, signifikansprövningar och resultat som stundtals framstått som mer eller mindre obegripliga. Emellertid har

min envishet kommit till nytta och glädje i det här projektet, den har hjälpt mig igenom de flesta kval och tvivel. Många insikter klokare och dessutom med svar på flera delar av min forskningsfråga kan jag nu se tillbaks på den här tiden som en av de mest utmanande, men också mest stimulerande, under hela min yrkesverksamma tid.

Andra som betytt mycket under avhandlingsprojektet är de som i olika seminariebehandlingar av arbetet kommit med konstruktiva synpunkter; Lisbeth Åberg Bengtsson, Jesper Boesen, LivSissel Grønmo och Berner Lindström. Marianne Andersson, Klas Eriksson och Anita Wallin har lotsat mig genom de administrativa snåren. På NCM har Bengt Johansson stöttat nätverket ”lärande och undervisning i mångkulturella matematikrum” och Marianne Dalemar har hjälpt mig hitta litteratur. I FUR-gruppen, som är en föredömlig forskningsmiljö, har jag haft en hemvist och fått ett varmt mottagande. Utan mina kamrater i FLUM-gruppen vet jag inte hur resultatet hade sett ut. Ni har varit verkliga kamrater med allt vad det innebär. Särskilt mycket har Cecilia Kilhamn, Maria Reis, Angelika Kullberg och Wei Sönnnerhed engagerat sig i mitt projekt, men även alla ni doktorander som anslutit till gruppen under senare år har visat ett stort intresse. Att arbete måste brytas av fikapauser med spännande och givande samtal har Hoda Agahi och Rimma Nilsson påmint mig om. Eva West, tänkt att vi följts åt även i det här arbetet - gott att ha Dig!

Anders, du är givetvis den viktigaste personen för mig under de här åren. Utan dig hade jag aldrig gett mig in i projektet och utan dig hade jag inte heller lyckats slutföra det. Med kärlek har du både förstått och bistått mig. Många av våra samtal om livets olika villkor finns invävda i den här avhandlingens själ. Mina barn John och Erik, och mina bonusbarn Jonna och Malin, ni tillför alltid kraft och glädje vilket bidragit till att jag haft inspiration och ork att genomföra projektet.

Tack till alla Er jag nämnt här ovan, men också till alla Er andra som betytt mycket för mig under avhandlingsarbetet!

Göteborg och Hännäset, i oktober månad 2011

Ase Hansson

INLEDNING

Utbildning är det mest kraftfulla vapen du kan använda för att förändra världen

Nelson Mandela

Ansvar i matematikundervisningen

I många flerspråkiga matematikklassrum i den svenska grundskolan sitter elever försjunkna i lärobokens matematikvärld i en strävan att på egen hand utveckla sin kreativitet och lösa uppgifter, andra elever fördriver tiden med mer privata aktiviteter. I dessa klassrum stimuleras eleverna att ta eget ansvar för att både formulera och uppfylla sina kunskapsmål. De tillåts också arbeta i egen takt utifrån individuella förutsättningar. Lärarens uppgift i dessa klassrum är framför allt att gå runt i klassrummet och hjälpa eleverna när de fått problem. I andra matematikklassrum leds däremot verksamheten av läraren, vilken undervisar och motiverar eleverna till samverkan med kamrater och till skapande enskilt arbete. En del elever låter sig här ledas medan andra är mer passiva deltagare. Till skillnad från det förra klassrummet är det läraren och inte eleverna som här tar ett stort ansvar för både målformulering och erbjudna aktiviteter, vilka antingen genomförs som kollektiva eller som strukturerade egenaktiviteter. Lärarens huvudsakliga uppgift är främst att skapa förutsättningar för elevernas läroprocesser och inte att rycka in då eleverna påkallar uppmärksamhet. Förutom dessa skissade didaktiska skillnader mellan olika matematikklassrum varierar även gruppammansättningarna i den svenska grundskolan, där andelen elever med utländsk bakgrund, eller från hem med svaga socioekonomiska förutsättningar, till stor del är relaterad till skolans geografiska placering eller skolform.

Betydelsen av dessa olika didaktiska och sociala förutsättningar för elevernas möjligheter att lära matematik behandlas i den här avhandlingen. Påverkas elevernas prestationer i matematik om huvudansvaret för lärandet ligger på den

enskilde eleven i stället för på läraren? Undervisas elever på olika sätt beroende på gruppammansättning, eller kan den svenska matematikundervisningen sägas vara pedagogiskt jämlik? Detta är exempel på frågor som diskuteras.

Ansvarsfrågor aktualiseras i många olika utbildningssammanhang, såväl vad gäller undervisning som mer övergripande policyfrågor. Utbildning har i Sverige visat sig övergå till att bli ett mer privat och individualistiskt uppdrag än ett offentligt (Carlgren, Klette, Myrdal, Schnack, & Simola, 2006), vilket överensstämmer med det globala policy-paradigm där statens roll omstrukturerats mot decentralisering, avregleringar, nedskärningar, ökad resultatstyrning och ökad valfrihet för individen (Dovermark, 2004). Begrepp som elevens ansvar, flexibilitet och valfrihet har kommit att betonas alltmer, och likaså har resultat i stället för undervisningsprocesser hamnat mera i fokus. Ansvaret för kunskapsbildningen har genom dessa förändringar förskjutits neråt i systemet, vilket exempelvis kommer till uttryck genom arbetsformen "eget arbete" som är organiserad kring den enskilde individen och ej kollektivet och där eleven själv planerar sitt skolarbete och tar ett stort ansvar för sitt eget lärande (Skolverket, 2009b; Vinterek, 2006; Österlind, 1998).

Parallellt med denna förskjutning av ansvaret har även andra faktorer med relevans för utbildningssektorn förändrats. Exempelvis har andelen elever med utländsk bakgrund blivit större i klasserna, de ekonomiska klyftorna har vidgats i samhället, bostadssegregationen har ökat och såväl ur ett nationellt som internationellt perspektiv har det dessutom skett en försämring av matematikresultaten under motsvarande period (Gustafsson & Yang Hansen, 2009; Skolverket, 2009b). De försämrade resultaten kännetecknas av både sjunkande medelvärden och ökad spridning mellan elevers och klassers resultat.

I den här avhandlingen har ansvaret för elevernas kunskapsbildning i matematik studerats. Olika perspektiv på ansvar har ställts mot varandra, antingen som riktat till läraren eller som riktat till eleverna. Det har därigenom varit möjligt att studera olika effekter av ansvarstagande på elevernas matematikprestationer. Det har också varit möjligt att undersöka om det finns något samband mellan undervisningsgruppernas sammansättning, såväl socialt som språkligt, och det perspektiv på ansvar som kommer till uttryck i undervisningen. Det meningsfulla i att undersöka effekter av olika aspekter av ansvar bygger på grundantagandet att undervisning har en potential att påverka elevers kognitiva utveckling och prestationer. De empiriska grunderna för detta antagande är goda (Cliffordson & Gustafsson, 2008; Hattie, 2009), medan det tidigare däremot inte är väl beforskat hur ansvarsfrågan påverkar effekter av undervisning.

Pedagogisk likvärdighet är ytterligare en aspekt av undervisningseffekterna. Ges alla elever möjlighet att ta del av matematikundervisning som stödjer deras matematiklärande, eller avgör gruppsammansättningen i den klass eleven går om undervisningen anpassas till elevens behov eller ej? Förekommer pedagogisk segregation? Detta är frågor som också utreds i den här avhandlingen. Att alla elevgrupper inte har samma möjligheter att utveckla sitt kunnande är belagt i tidigare forskning och återspeglas bland annat genom familjebakgrundens påverkan på elevernas kunskapsnivåer (Sirin, 2005). Detta inflytande har dessutom visat sig öka i Sverige under de senaste åren (Skolverket, 2009b). Utöver familjernas olika sociala och ekonomiska förutsättningar har migrationen inneburit att även elevers och familjers språkkompetenser blivit en betydelsefull faktor relaterad till prestationer i olika skolämnen. I matematik uppvisar elever med utländsk bakgrund lägre resultat än andra elevgrupper (Skolverket, 2009a). Det är därför motiverat att undersöka om dessa olika individuella bakgrundsfaktorer förutom en direkt påverkan på elevernas prestationer även påverkar utformningen av matematikundervisningen. Om elevers eller grupper matematikresultat till viss del kan förklaras av pedagogisk segregation är det att betrakta som en segregationseffekt medierad genom undervisningen.

En kraft med möjlighet att motverka ett ökat inflytande från elevernas individuella bakgrundsfaktorer är den undervisning eleverna möter i skolan. Både de växande socioekonomiska klyftorna och den språkliga mångfalden i den svenska grundskolan utgör därför utmaningar inom matematikundervisningen. Förutom att stödja elevernas matematikutveckling behöver undervisningen också stödja deras språkutveckling. En del elever behöver dessutom hjälp med att tolka en ny främmande skolkultur eller kompensation för förlorad undervisning. Till detta kan läggas att alla föräldrar inte har tillräcklig kännedom om organisatoriska och innehållsliga villkor i den svenska grundskolan för att på ett fullgott sätt kunna stödja sina barn i deras kunskapsutveckling. Detta medför att skolans roll blir än mer viktig för dessa elever. Speglat mot dessa villkor för matematikundervisningen är det viktigt att undersöka hur en förflyttning av ansvar för kunskapsbildningen från läraren över till eleverna påverkar skolans möjligheter att vara en motkraft till negativt inflytande från individuella bakgrundsfaktorer. Det är dessutom viktigt att undersöka om matematikundervisningens utmaningar möts på ett lika kraftfullt sätt i alla undervisningsgrupper, oavsett sammansättning.

Utöver ansvarsfrågan och den pedagogiska likvärdigheten är det också angeläget att förhålla sig till vems behov av kunskaper som prioriteras i matematikundervisningen, samhällets eller elevens. Det kan inte förutsättas att dessa behov sammanfaller, ty ur ett samhällsperspektiv kan det exempelvis vara önskvärt med

kunskaper som stödjer en rådande ordning, medan det ur ett individperspektiv kan efterfrågas kunskaper för egna ställningstaganden och ageranden vilka kan stå i strid med samhällets strävan. Möjligheten att förena dessa båda perspektiv är inte oproblematiskt. Dewey (2005), vars pedagogiska idéer till stor del legat till grund för utformningen av den svenska skolan, menade emellertid att det genom den progressiva pedagogik han förespråkade var möjligt att både möta demokratiens behov av öppna och förändringsbenägna medborgare och samtidigt tillfredsställa samhällets behov av kunskaper. Ur andra perspektiv, där skolan i stället ses som ett led i samhällets politiska och kulturella motstridigheter och inte som ett neutralt och objektivt instrument för förändring (Bourdieu & Passeron, 1990), betraktas däremot inte dessa båda roller som förenliga. Ett grundläggande villkor för att realisera Deweys vision om att utbildning har kraft att möta elevers behov är emellertid att samhället tar ansvar för att alla elever får möjlighet att skaffa de kunskaper och förmågor som är en förutsättning för det demokratiska samhället. Mot bakgrund av att eleverna i den svenska matematikundervisningen fått ta ett allt större ansvar för sitt eget lärande och att sociala och demografiska förändringar alltmer kommit att påverka skolresultaten är det motiverat att undersöka vilken potential matematikundervisningen har att möta kravet på allas möjligheter att utveckla sina matematikkunskaper.

I en moralfilosofisk teori om rättvisa, ”The capabilities approach” (Nussbaum, 2000), betonas just att samhällets roll är att prioritera demokratiens behov framför samhällets. Denna teori har Nussbaum utvecklat utifrån tankar och idéer inom utvecklingsekonomi, framtagna av Amartya Sen (Sen, 1987, 1988). Till skillnad från Sen har emellertid Nussbaum tydligare betonat ett motstånd mot kulturell relativism och tagit ställning för total jämlikhet i stället för att acceptera en tröskelnivå för jämlikheten. Det är vad människor kan göra, vad de har förmåga till, som enligt Nussbaum beskriver graden av rättvisa i ett samhälle, inte i första hand hur människor upplever sina liv eller hur materiella tillgångar är fördelade. Efter att människor nått över en tröskel för vad som kan betraktas som ett mänskligt liv överhuvudtaget (mat, bostad etc.) har samhället som ansvar att se till att människor kan skaffa sig de förmågor som är nödvändiga för ett gott mänskligt liv. För att friheten att välja inte skall bli skenbar krävs att människor har förmågor och positioner så att de kan agera som demokratiska medborgare och göra fria val i livet. Nussbaums teori bygger till skillnad från postmodernismens relativism på att alla människor i grunden har mycket gemensamt och därför betraktar vad som är förnuftigt på ett likartat sätt, vilket gör det möjligt att formulera vilka de nödvändiga förmågorna är. Ett exempel på en sådan allmänmänsklig faktor som påverkar människans möjligheter att göra fria val i

livet är den kognitiva förmågan. Nussbaum diskuterar att skolan genom sin undervisning i exempelvis läskunnighet och baskunskaper i matematik och naturvetenskap spelar en viktig roll för elevernas möjligheter att utveckla sin kognitiva förmåga och därigenom bli kapabla att använda förnuft, tänkande och resonande i olika sammanhang i livet. Ansvar för elevernas utveckling kan enligt denna teori inte läggas på enskilda individer, snarare måste utvecklingsmöjligheterna implementeras uppifrån via samhällets styrfunktioner. Ur ett lärarperspektiv innebär detta synsätt att ansvaret för undervisningens villkor till stor del vilar på beslutsnivåer ovanför klassrummet och ur ett elevperspektiv att ansvaret för lärandets villkor till stor del vilar på nivån ovanför eleverna, det vill säga läraren. Det är genom en sådan ordning som ett samhälle kan sträva efter rättvisa och jämlikhet enligt Nussbaum.

För att matematikundervisningen skall bidra till att människor kan agera som demokratiska medborgare och göra fria val i livet förutsätts att undervisningen utgör en motkraft till negativt inflytande från individuella bakgrundsfaktorer. Med utgångspunkt i Nussbaums teori har det i den här avhandlingen undersökts hur en förskjutning av ansvar över till eleverna påverkar undervisningens möjligheter att skapa förutsättningar för alla elever att bygga upp sina matematikkunskaper.

Övergripande syfte

Det övergripande syftet med avhandlingen är att belysa hur variationen i matematikprestationer mellan olika klassrum är relaterad till ansvar för elevernas läroprocesser. Ansvarets roll i undervisningens uppdrag att stödja alla elevers egen konstruktion av matematikkunskaper och motverka negativt inflytande från individuella bakgrundsfaktorer kan därigenom klargöras.

Detta syfte förtydligas genom ett antal forskningsfrågor i kapitlet ”Studiens syfte, forskningsfrågor och design”. Genom teorier för lärande och undervisning samt med stöd från empiriska forskningsresultat har faktorer som belyser viktiga dimensioner av ansvar för matematiklärandet identifierats och därefter relaterats till elevernas prestationer. För elever med utländsk bakgrund har betydelsen av bristande kompetenser i undervisningsspråket problematiserats och haft ett inflytande över den analysmodell som utvecklats.

Epistemologiska utgångspunkter

Forskningsansatsen i denna avhandling är sekundäranalys av storskalig data (Bos, 2002). Effekter av olika kontextuella faktorer på elevernas matematikprestationer i årskurs åtta undersöks, både på elev- och gruppnivå. Denna typ av ansats

karaktäriseras ofta av att eftersträva generella resultat, vara kvantitativ samt av att forskaren har distans till sitt forskningsobjekt (Cohen, Manion, & Morrison, 2007). Då jag inte bedömer att någon av dessa karaktäristika fångar "själen" i den teoretiska inramningen av avhandlingen, har jag i stället valt att betrakta den som en "klimatstudie" (Gustafsson, 2008), vilket jag grundar på nedanstående argumentation.

Resultat från en undersökning kan vara mer eller mindre generaliserbara, inte generella i sig. Man tror inte på en föreställning för att den är sann, utan den blir sann för att man tror på den, vilket är en devis myntad av Durkheim. Latour (1987) uttrycker detta på följande sätt:

The fate of what we say and make is in later users` hands...By looking only at them and at their [the statements] internal properties, you cannot decide if they are true or false, efficient or wasteful, costly or cheap, strong or frail. These characteristics are only gained through incorporation into other statements, processes and pieces of machinery. (s. 20)

Hur generellt eller "sant" ett forskningsresultat är, eller snarare blir, är då inte enbart relaterat till vilken forskningsansats studien är gjord inom, utan även till hur resultatet kommer att tolkas och brukas i olika sammanhang. Den traditionella indelningen i mer eller mindre generaliserad forskning blir därför inte lika relevant om man ser generalisering som en process i stället för en bestämd inneboende egenskap i ett forskningsresultat. Traditionell dikotomisering av forskningsansatser skulle kunna innebära att man förbiser att de flesta studier av komplexa samhällsliga fenomen präglas av både subjektiva, kvalitativa och humanistiska inslag. Förutsättningarna för att forskaren skall kunna definiera generaliserbarheten av ett forskningsresultat är däremot större om man har undersökt mönster och strukturer inom ett stort antal observationer jämfört med att endast ha analyserat ett fåtal observationer. Valet av forskningsansats tar i den här studien sin utgångspunkt i det övergripande syftet med avhandlingen, att analysera mönster och strukturer i elevprestationer under olika organisatoriska betingelser.

Att denna typ av forskning, vilket Cohen, Manion och Morrison (2007) hävdar, skulle betraktas som "kvantitativ" bara för att data som används vid analysen av strukturer och mönster är kvantitativ har inte sin motsvarighet i den forskningsprocess som är genomförd i den här studien. Endast teoridrivna metoder är använda där kvalitativa överväganden ligger bakom både formulering av hypoteser, utformning av analysmodeller och val av observerade variabler. Analys och tolkning av resultaten utgår helt från kvalitativa överväganden, även om dessa relateras till olika kvantitativa mått.

Slutligen vill jag också ifrågasätta relevansen av att kategorisera forskningsansatser utifrån forskarens närhet till forskningsobjektet och dennes aktivitet i själva datainsamlingen, vilket görs av bland andra Denzin och Lincoln (2005). Att forskarens närhet och aktivitet i grunden skulle vara av så stor betydelse för att bedöma forskningsansatsens kvalitet och relevans ifrågasätts av Sfard (1998), då hon i stället lyfter fram resultatens potential i olika sammanhang som ett mer meningsfullt kriterium. Gustafsson (2008) diskuterar också närhet och distans, men inte utifrån vilken potential resultat kan ha i olika sammanhang utan snarare utifrån att resultat kan belysa olika aspekter av samma fenomen beroende på om forskaren haft närhet till forskningsobjektet eller varit distanserad från det. Genom att använda en metafor om klimat och väder för Gustafsson en diskussion om att klimatstudier kan användas för att visa övergripande strukturer medan väderstudier visar mer ingående beskrivningar av specifika väderförhållanden. Klimatstudier, som inte har en tydlig närhet till forskningsobjektet, ger underlag för att göra jämförelser mellan olika klimat. De ger däremot inte speciellt mycket information om vilket väder man kan förvänta sig eftersom variationen av väder är mycket stor. Väderstudierna, som har en tydligare närhet till forskningsobjektet, ger däremot inte underlag för meningsfulla jämförelser mellan olika väder och de säger inte heller så mycket om klimatet eftersom det behövs väldigt många observationer för att man skall våga dra slutsatser om klimat.

Utifrån dessa resonemang väljer jag att sätta etiketten klimatstudie på forskningsansatsen i denna avhandling vilken har till syfte att belysa strukturer inom matematikundervisningen. I stället för att betrakta resultaten av studien som generella kan de sägas ha en potential att användas i olika sammanhang där effekter av undervisning diskuteras. De många kvalitativa överväganden som är gjorda, både för att formulera hypoteser och analysmodeller, samt vid tolkningen av resultaten, gör att begreppet ”kvantitativ” ansats blir missvisande.

Till sist vill jag kommentera att det trots en till synes stor distans mellan mig som forskare och objektet för min studie finns en närhet som grundas i min kännedom om matematikundervisning i den svenska grundskolan efter många år som praktiserande matematiklärare och lärarutbildare. Det innebär att även i denna forskningsansats har min ”närhet” till det studerade objektet ett visst inflytande trots att jag i forskningen inte möter elever och lärare i klassrumssituationerna. Min kännedom om det studerade fenomenet kan både ha påverkat valet av forskningsfrågor och tolkningen av resultaten. Alla forskare har intersubjektivt konstituerade föreställningar om skolmiljön vilket innebär att föreställningarna är situerade i mellanmänskligt handlande och därför historiskt och kulturellt påverkade. Detta gäller även mig. Emellertid har mina personliga erfaren-

heter av skolmiljön bidragit till att jag dessutom har konstruerat egna tolkningar och föreställningar. Vid formuleringen av forskningsfrågorna har jag huvudsakligen betraktat denna ”närhet” som en tillgång, ty val av forskningsobjekt, vilket inom utbildningsfältet ofta tar sin utgångspunkt i möjligheter och problem, har jag kunnat identifiera i möten med skolans praktik. Då analys och tolkning av resultat inte endast har utgått från kvantitativa mått utan även från kvalitativa överväganden, har min kännedom om skolmiljön samtidigt som den varit berikande också utgjort ett möjligt hot mot validiteten i slutsatserna. Som forskare har det därför varit viktigt att under hela avhandlingsprojektet vara medveten om riskerna med de personliga erfarenheterna och sträva efter tillförlitliga slutsatser.

Avhandlingens disposition

Innan syfte, forskningsfrågor och design presenteras ges en bakgrund till de delstudier som ingår i avhandlingen. I denna bakgrund beskrivs bland annat sådana samhällsförändringar som utgör en relief till forskningsobjekten. De teorier som ligger till grund för teoretiska konstruktioner och analyser presenteras därefter, exempelvis de teoretiska utgångspunkterna för både matematiklärande och matematikundervisning. Grupsammansättningens effekter för elevernas kunskapsbildning behandlas och en bakgrund med definition och tidigare forskning kring pedagogisk segregation ges därefter. Metodval och data presenteras innan sammanfattningarna av studierna. Avslutningsvis diskuteras resultat och implikationer av de tre delstudierna, vilka finns presenterade i tre bifogade artiklar i slutet av boken.

BAKGRUND OCH TEORETISKT RAMVERK

I detta kapitel ges inledningsvis en bakgrund till studien med en presentation av olika samhällsförändringar som är relaterade till matematikundervisningens villkor i den svenska grundskolan. Därefter presenteras teoretiska utgångspunkter och empiriska forskningsresultat om lärande och undervisning i matematik i det flerspråkiga klassrummet. Efter denna presentation görs en jämförelse mellan centrala teoretiska utgångspunkter i studien. Teoretiska utgångspunkter för grupp sammansättningens betydelse och för pedagogisk segregation presenteras avslutningsvis.

Förändringar inom samhälle och utbildning

I detta avsnitt presenteras olika samhällsförändringar som skett parallellt med förändrade matematikprestationer i grundskolan de senaste decennierna. Avsnittet, som utgör relief till syfte och forskningsfrågor, avslutas med en beskrivning av hur ansvaret för elevernas lärande förändrats under samma period.

Etniska, demografiska och socioekonomiska förändringar

Invandring till Sverige

Många västerländska länder genomgår stora befolkningsmässiga förändringar orsakade bland annat av den internationella migrationen (D. Coleman, 2006; OECD, 2003). Till Sverige har nettoinvandringen varit nästan en halv miljon personer mellan åren 1992 och 2008, och 2008 var invandringen till Sverige dubbelt så stor som den var 1999 och ungefär var fjärde invandrare var under 18 år (Immigrantinstitutet, 2009). Invandringen har varit störst till storstadsregionerna samtidigt som även omflyttningarna inom Sverige är störst till Stockholm, Göteborg och Malmö¹. Storstadsregionerna har också den största andelen invånare med utländsk bakgrund, betydligt större än för riket som helhet².

¹ Statistiska centralbyrån (SCB), Demografiska rapporter 2008:4

² Statistiska centralbyrån (SCB); Antal personer med utländsk eller svensk bakgrund efter kommun, ålder i tioårsklasser och kön, År 2002-2008

Närmare 330 000 barn i Sverige hade 2008 utländsk bakgrund, vilket innebär att de är födda utomlands eller i Sverige av utlandsfödda föräldrar³. Det motsvarar 17 procent av alla barn under 18 år, vilket kan jämföras med 13 procent 1998. Irak är det vanligaste födelselandet bland barn som är födda utomlands, 22 000 kommer därifrån. År 2008 var drygt 200 000 av barnen med utländsk bakgrund födda i Sverige och denna grupp har stadigt ökat i antal och vanliga ursprungsländer är Irak och länderna i det forna Jugoslavien.

I grundskolan återspeglas den ökade invandringen av en successiv ökning av andelen elever med utländsk bakgrund, och det är gruppen utlandsfödda som ökar mest (Skolverket, 2009b). Ungefär 15 % av alla elever i grundskolan hade utländsk bakgrund 2003 och det talades fler än hundra olika modersmål (Skolverket, 2009b). Jämfört med andra grupper är skolresultaten lägre för elever med utländsk bakgrund, även om variationerna inom gruppen är stora. Exempelvis visar sig ursprungsland, migrationsorsak och ålder vid immigrationstillfället ha betydelse för resultaten. Det finns både svenska och internationella studier som visar att de elever som anländer till ett land före 9 års ålder i allmänhet inte har några större problem att klara av skolan (Cahan, Davis, & Staub, 2001; Elmeroth, 2006). I den här avhandlingen har det emellertid inte varit möjligt att utnyttja denna bakgrundsinformation vid indelningen av eleverna i olika grupperingar, eftersom det datamaterial som använts, TIMSS 2003, endast erbjuder ett mycket begränsat urval av elever från motsvarande målgrupp, varför eleverna i stället har grupperats utifrån om de är födda i Sverige eller utomlands.

Orsakerna till de lägre skolprestationerna för elever med utländsk bakgrund visar sig vara komplexa, vilket motiverar forskning inom många olika områden för att finna faktorer som kan stödja dessa elevers lärande. Elmeroth (2006) slår exempelvis fast att de lägre skolprestationerna inte enbart kan tolkas som en effekt av föräldrarnas socioekonomiska status eftersom denna grupp inte utgör en socioekonomiskt homogen grupp. Matematikundervisningen är ett exempel på ett område som behöver beforskas för att klarlägga olika undervisningsfaktorer potential att stödja dessa elevers kunskapsutveckling i matematik. Den dystra resultatbilden till trots så förklarar den ökande invandringen endast marginellt den allmänna nedgången av matematikresultaten på riksnivå (Skolverket, 2009b).

Boende- och skolsegregation

De beskrivna befolkningsförändringarna återspeglas också i den boendesegregation som finns i Sverige. Den etniska boendesegregationen, vilken är störst i storstadsregionerna, har fortsatt att öka in på 2000-talet (Gustafsson, 2006; SCB,

³ SCB: Pressmeddelande 2009-11-23: Barn och deras familjer 2008

2007). Två tredjedelar av alla barn med utländsk bakgrund bor i de tre storstads-länen medan endast knappt hälften av alla barn med svensk bakgrund bor i dessa län (SCB, 2007). Även inom storstäderna finns en utbredd etnisk segregation. Samtidigt har nästan 40 % av Sveriges alla kommuner endast en mycket liten andel elever med utländsk bakgrund. Orsaken till den etniska segregationen kan antingen betraktats som humanekologisk, vilket innebär att invandrare skulle föredra att bosätta sig nära varandra, eller som strukturalistisk, vilket betyder att segregationen har socioekonomiska orsaker (Skolverket, 2009b). Boendesegregation kan förutom etniska faktorer också karaktäriseras av demografiska vilka omfattar uppdelning efter ålder, kön och hushållstyper. Den kan också karaktäriseras av socioekonomiska faktorer vilka omfattar uppdelning efter resurser som inkomster, utbildning och arbetsmarknadsstatus. Det är emellertid den etniska boendesegregationen som haft det största genomslaget under perioden, även om samtliga faktorer ökat. Det framgår också att boendesegregation huvudsakligen är ett storstadsfenomen.

Boendesegregation ligger i sin tur till grund för den skolsegregation som förekommer i Sverige. Därtill kan skolsegregationen också betraktas som en konsekvens av det fria skolvalet. Ytterligare en faktor som kan relateras till skolsegregationen är den kunskapsmässiga differentiering av eleverna som kan förekomma såväl inom som mellan skolor. Det fria skolvalet karaktäriseras av såväl denna kunskapsmässiga differentiering som den etniska och socioekonomiska uppdelningen av eleverna. Sammantaget visar detta att skolsegregationen kännetecknas av en mycket stor komplexitet. I ett barnindex baserat på socioekonomiska, etniska och prestationsmässiga faktorer visas en kraftig ökning av skolsegregationen från 1992 och fram till år 2002 (Gustafsson, 2006), vilket Gustafsson ser som orsakat av bland annat boendesegregationen och det fria skolvalet.

Skolsegregationens effekter

På vilka sätt skolsegregationen är relaterad till de allt större skillnaderna i prestationer mellan elever, klasser och skolor behöver belysas. I Skolverkets rapport (2009b) framhålls att sammansättningen av elever i skolorna påverkar betygsnivåerna och att det då är kamrateffekterna som sannolikt är av avgörande betydelse. I en studie av Szulkin och Jonsson (2007) framgår exempelvis att etniskt homogena grupper har negativa effekter på betygen i årskurs 9. Dessa effekter var inte begränsade till endast de elever som hade utländsk bakgrund, men de var mest dominerande för dessa elever. Om andelen elever i klassen med utländsk bakgrund inte var över 40 procent så uppkom inga negativa effekter, men däremot om andelen översteg 40 procent. Kamrateffekter innebär att individen påverkas av studieprestationerna i hela klassen. Både för enskilda elever och för

resultat på skolnivå har kamrateffekterna visat sig vara stora (Thrupp, Lauder, & Robinson, 2002; Zimmerman, 2003). Genom det fria skolvalet som infördes i Sverige 1992 fanns förhoppningar att kunna bryta vissa av de negativa effekter som boendesegregationen och kamrateffekterna hade på skolresultaten, men skillnaderna mellan olika skolors resultat, främst inom storstadsregionerna, har i stället visat sig öka (Skolverket, 2009b). Det fria skolvalet har alltså ökat skolsegregationen och minskat likvärdigheten i utbildningen vilket till viss del kan bero på att det finns ett samband mellan familjestatus och val av skola (Myrberg, 2006; Myrberg & Rosén, 2006).

Utöver de kamrateffekter som tidigare forskning belyst är det också tänkbart att matematikundervisning kan utformas på sätt som mer eller mindre förstärker eller mildrar dessa effekter. Om elever på grund av grupsammansättningen i den klass de går inte får undervisning som är anpassad till deras behov kan man säga att det förekommer pedagogisk segregation. Detta är frågor som problematiseras och undersöks i den här avhandlingen.

Förändrade matematikprestationer

Behovet att utveckla matematikundervisningen i svensk grundskola framstår som stort mot bakgrund av resultat från både nationella och internationella undersökningar. Svenska elever uppvisar en kraftig tillbakagång vad gäller matematikprestationer de senaste 15 åren och denna tillbakagång har skett från en relativt hög internationell nivå (Gustafsson & Yang Hansen, 2009; Skolverket, 2008b, 2009b). I internationell jämförelse hör Sverige till de länder som haft den kraftigaste tillbakagången under perioden (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie, & Turmo, 2004). Skillnaderna i resultat mellan olika skolor har under samma period ökat, liksom påverkan från föräldrarnas utbildningsnivå på prestationerna.

Skillnaderna i betyg för elever med utländsk och svensk bakgrund har också ökat sedan början av 1990-talet. Elever med utländsk bakgrund lyckas allmänt sämre än elever med svensk bakgrund, oavsett hur länge de varit i Sverige (Skolverket, 2009b). Det är mer än tre gånger så stor del av dessa elever som inte får något slutbetyg över huvud taget i grundskolan, och 20 procent färre går ut grundskolan med betyg i minst 16 ämnen⁴. Dock har det betydelse för skolprestationerna hur länge elever med utländsk bakgrund har varit i Sverige. De som kommit före 7 års ålder uppvisar samma resultat som de som är födda i landet och ju äldre de varit när de anlänt till Sverige desto lägre resultat uppvisas (Skolverket, 2009b). Detta kan tyda på att tidiga skolår samt kompetenser i undervisningsspråket är av central betydelse för att elever med utländsk bak-

⁴ Skolverket: Tabell 6 A: Slutbetyg från årskurs 9 för elever i skolor med betyg enligt det mål- och kunskapsrelaterade betygssystemet samt elever som ej uppnått målen, läsåret 2008/09

grund skall få goda resultat i årskurs 9. Även vad gäller matematikprestationerna så visar sig dessa skillnader tydligt mellan elevgrupperna, då endast 84 procent av eleverna med utländsk bakgrund har slutbetyg i matematik⁵ medan över 94 procent av de med svensk bakgrund har det⁶. Det högsta betyget i matematik, mycket väl godkänt, har uppnåtts av knappt 10 procent av eleverna med utländsk bakgrund⁵, medan över 14 procent av de med svensk bakgrund har uppnått detta betyg⁶. Problematiken är tydligast uttalad i storstadsregionerna där även skolsegregationen är mest framträdande. Matematikbetygen i årskurs 9 skiljer sig mellan storstäderna och riket i övrigt. I exempelvis Göteborg var det 8,6 procent av eleverna som läsåret 2004/2005 inte uppnådde målen i matematik i årskurs 9 och i Malmö var det 15,5 procent, vilket skall jämföras med 7,0 procent för riket som helhet. För att åstadkomma likvärdig undervisning behöver de mekanismer som ligger bakom det eventuella sambandet mellan skolsegregation och måluppfyllelse klarläggas.

Ökat elevansvar i matematikundervisningen

Den svenska grundskolan kännetecknas formellt av sammanhållen undervisning. En decentraliserad läroplan lämnar åt de lokala aktörerna att på bästa sätt organisera och genomföra undervisningen så att måluppfyllelsen blir så god som möjligt. Läroplansreformerna under 1900-talets andra hälft har dock präglats av tveksamhet till sammanhållen matematikundervisning, vilket bland annat bidragit till att olika differentieringsåtgärder förekommit under längre tid i matematik än i de flesta andra skolämnen. Nivågrupperingen ”allmän” och ”särskild” kurs var där dominerande ända fram till läroplansreformen 1994 eftersom differentiering sågs som ett lämpligt medel för individualiserad undervisning, detta trots att Läroplanen för grundskolan 1980 (Lgr80) föreskrev sammanhållen matematikundervisning (Lindensjö & Lundgren, 2002; Skolverket, 2008b). Efter införandet av Läroplan för det obligatoriska skolväsendet 1994 (Lpo94) visar sig olika former av differentiering fortfarande vara vanliga. Fyra av tio grundskoleelever går i nivåindelade grupper i ett eller flera ämnen (Skolverket, 2007) och matematik är det ämne där nivåindelning främst förekommer (Skolverket, 2009b). Ett annat sätt att organisera undervisningen, vars uppkomst kan härledas till införandet av åldersblandade klasser på 1970-talet, är som ”eget arbete” där hastighetsindividualisering och ett stort elevansvar blivit dominerande (Österlind, 1998). Denna arbetsform har efter införandet av Lpo94 fortsatt att dominera undervisningen

⁵ Skolverket: Tabell 7 C: Elever med utländsk bakgrund med betyg enligt det mål- och kunskapsrelaterade betygssystemet samt elever som ej uppnått målen, per ämne i årskurs 9, läsåret 2008/09

⁶ Skolverket Tabell 7 B: Elever med svensk bakgrund med betyg enligt det mål- och kunskapsrelaterade betygssystemet samt elever som ej uppnått målen, per ämne i årskurs 9, läsåret 2008/09

(Vinterek, 2006). I en internationell studie av Hanushek och Wössmann (2006) framgår att länder med tidig differentierad undervisning uppvisar lägre nivåer på kunskapstest i matematik och större spridning mellan eleverna än de länder som har sammanhållen undervisning. Sverige utgör dock ett av undantagen i detta avseende. Trots sin formellt sammanhållna matematikundervisning uppvisar Sverige resultat som är jämförbara med de länder som har tidig differentiering av undervisningen. En tänkbar orsak till detta överraskande resultat kan vara att den svenska matematikundervisningen trots sin formellt sammanhållna karaktär präglas av tidig ”dold” differentiering, detta som en konsekvens av både skolsegregation och nivågruppering inom skolorna och möjligen även av arbetsformer med stora inslag av ansvar lagt på eleverna för deras läroprocesser.

I en historisk tillbakablick visar Lindensjö och Lundgren (2002) att den nuvarande matematikundervisningen är ett resultat av många olika krafters motstridiga viljor och intentioner under en långsam förändringsprocess av skolans organisation och arbetsformer. Denna tröghet i förändringsprocessen samt gapet mellan förändringens avsikter och dess effekter i praktiken beskrivs av Liedman (2003, s 215) på följande sätt; ”skolan är en fast kropp, en institution med sin institutionella tröghet. Reformen förändrar denna kropp men sällan så mycket som var avsikten och aldrig helt i avsiktens riktning”. Den utdragna strävan att skapa sammanhållna matematikklasser är ett exempel på tröghet. Ett exempel på en förändring som möjligen kan visa på ett gap mellan en skolreforms avsikter och dess effekter i praktiken är förskjutningen av ansvaret för matematiklärandet över till eleverna. Om denna ansvarsförskjutning har bidragit till försämrade matematikresultat i den svenska grundskolan så är den givetvis i strid med intentionerna.

Det är inte enbart framväxten av en sammanhållen matematikundervisningen som präglats av en trög förändringsprocess, det har gällt generellt för sammanhållen undervisning. Ett av de första tydliga stegen mot sammanhållen undervisning togs redan 1894 när inträdeskravet till läroverket blev 3 års botten-skola och skolformen därmed blev tillgänglig för fler ungdomar. Det dröjde dock inte länge förrän en ny differentiering gjordes i och med att realskolan 1905 separerades från gymnasiet (Lindensjö & Lundgren, 2002). Läroverken blev inte heller den språngbräda för social mobilitet som många hade hoppats på, utan de sociala hierarkierna reproducerades (Florin & Johansson, 2002). Denna period var också en brytningstid mellan olika utbildningsfilosofiska idéer. Humboldts utbildningsreform i början av 1800-talet hade ett starkt inflytande från upplysningstankarna och den filosofiska idealismen (Liedman, 2003), där skolan betraktades som en kraft att förändra samhället. Senare utbildningsfilosofiska idéer

tog sin utgångspunkt i att det var samhällsutvecklingen som påverkade skolan och att eleverna skulle förberedas för samhällets krav och förväntningar. Den amerikanske pragmatiska filosofen och reformpedagogen Dewey (2005), vilken senare kom att betyda mycket för den svenska skolans utveckling under 1900-talet, utgick ifrån att skolans roll var att förbereda barnen för ett liv i ett demokratiskt industrialiserat samhälle, där ”learning by doing” blev en dominerande undervisningsmetod. Enligt Dewey skulle det dock vara möjligt för skolan att möta både samhällets och individens behov. Dessa idéer avspeglades i de svenska skolreformerna när den sammanhållna grundskolan introducerades. Läroplanerna blev emellertid kompromisser med fortsatta inslag av differentiering, exempelvis kvarstod parallella utbildningar i matematik.

Differentierings- och individualiseringsfrågor har därefter länge präglat debatten. Vid läroplansreformen 1980 fanns intentioner att forma en gemensam sammanhållen skola, men även denna reform blev en kompromiss. Möjligheten att organisera undervisningen i allmän och särskild kurs togs bort ur kursplanerna i matematik men timplanerna öppnade trots detta upp för möjligheten att differentiera undervisningen (Lindensjö & Lundgren, 2002). I nästa skolreform, Lpo94, infördes en målstyrd decentraliserad skola med formellt sammanhållen undervisning i nio år. Detta kan betraktas som ett sätt att lösa den långa och segslitna konflikten mellan sammanhållen och differentierad grundskola, ty en kommunalisering av grundskolan ungefär samtidigt med införandet av denna läroplan gav stora friheter att organisera undervisningen på lämpliga sätt för att nå hög måluppfyllelse. Denna decentralisering sågs också som ökad möjlighet till effektivisering av utbildningen genom marknadsanpassning och tydligare fokus på lärarens professionalitet. Med marknadsanpassningen kom också valfrihet att präglade skolans verksamhet.

Skolreformerna kan alltså betraktas som resultat av olika idéer och intresseyttringar och när den sammanhållna skolan till sist infördes så skedde det parallellt med ökad decentralisering av verksamhetsansvaret. På den kommunala nivån delegerades även visst ansvar till enskilda skolenheter. Kontrollen och inflytandet över hur sammanhållen den sammanhållna undervisningen till sist blev minskade till förmån för individuella lösningar. Utöver att enskilda skolor fått inflytande över organisationen av gruppammansättningarna, som sammanhållna eller differentierade, har det även i varje enskilt klassrum kunnat växa fram undervisningskulturer med mer eller mindre sammanhållande eller differentierande effekter. Framväxten av det ökade individuella elevansvaret för lärandet (Carlgren, et al., 2006) är ett exempel på en faktor som möjligen kan ha haft differentierande effekter inom klassens ramar. Att eleven tar ett allt större

ansvar för sitt eget lärande har enligt Carlgren, et al. föregåtts av andra individualiseringssträvanden, men då under utbildningssystemets ansvar. Dessa individualiseringssträvanden har syftat till en rättvis skola genom att antingen erbjuda alla elever samma undervisning och utbildningsmöjligheter eller också genom att anpassa undervisningen helt till varje enskild elevs behov. Exempelvis genomfördes individualiseringsförsök under 1960- och 70-talet genom införandet av undervisningsteknologi där alla elever var garanterade samma slags undervisning. Försöket var dock inte lyckosamt vilket bland annat framgick av en dramatisk ökning av specialundervisningen under samma period (Lindensjö & Lundgren, 2002). Denna enhetlighet i undervisningsmetoderna kom sedan att ersättas av olika åtgärder för att anpassa undervisningen till enskilda elevers behov. Ett exempel på anpassad matematikundervisning var, förutom uppdelningen i allmän och särskild kurs, en arbetsform som kom att kallas hastighetsindividualisering där varje elev arbetade individuellt i sin egen takt. Denna arbetsform har emellertid lett till stora brister i måluppfyllelsen (Vinterek, 2006), inte bara vad gäller kunskapsmålen i matematik utan även vad gäller de mer övergripande målen i läroplanen (Skolinspektionen, 2009; Skolverket, 2003a).

Idéer om att barn skall utvecklas till bildade medborgare, vilka tidigare präglat olika individualiseringsåtgärder i skolan, har sedan början av 1990 övergått till idéer om att den enskilde individen skall ta ansvar för sitt eget liv (Carlgren, et al., 2006). Carlgren et al. konstaterar att denna förskjutning till viss del kan utläsas ur läroplanen för grundskolan, Lpo94, där idén att eleven skall vara aktiv i läroprocessen och skapa sin egen kunskap har ersatts av att eleven skall ta ansvar för sitt eget lärande. Denna förändring utgör en av utgångspunkterna för organisationsformen eget arbete som karaktäriseras av ett stort elevansvar för lärandet (Stähle, 2006; Vinterek, 2006; Österlind, 1998). Matematikundervisningen har under de senaste decennierna också blivit alltmer individualiserad i linje med den beskrivna trenden, med arbetsformer präglade av mycket elevansvar (Sahlström, 2008; Skolverket, 2009b). Uppkomsten av eget arbete kan härledas till införandet av åldersblandade klasser på 1970-talet (Österlind, 1998). Det kan betraktas som en styrning bort från en kollektivt präglad organisation av undervisningen till en mer elevcentrerad och individualiserad undervisning. Österlind diskuterar att arbetsformen förutom att utgå från lärteoretiska motiv infördes för att lösa vissa praktiska problem i samband med införandet av den åldersblandade undervisningen. Ytterligare ett syfte var att eleverna skulle få ett ökat inflytande över skolarbetet och därmed känna större motivation. Visserligen har eget arbete kommit att anta olika skepnader i olika un-

dervisningssammanhang skriver Österlind, men det som definieras som eget arbete har ändå vissa gemensamma karaktärstika. Arbets sättet karaktäriseras som självreglerande och organiserat kring den enskilde individen, ej kollektivet, och eleven förväntas själv planera sitt skolarbete (Österlind, 1998). Inslaget av elevansvar för den egna lärprocessen är genomgående stort i eget arbete, vilket emellertid inte motsäger att lärarens ansvar likväl skulle kunna vara betydande, framför allt för att strukturera arbetet och förbereda med lämpligt undervisningsmateriel och problemuppgifter. Att eget arbete utmärks av att eleven har ett betydande inslag av ansvar för planering kan möjligen uppfattas som svårt att förena med ett stort läraransvar. Resultat från senare studier som visar hur arbetsformen utvecklats pekar också i denna riktning. Granström (2007) och Hensvold (2006) visar att lärarstyrda gemensamma uppgifter har minskat till förmån för elevernas egna planeringar, vilket dock inte har medfört att eleverna fått ökat inflytande över innehållet i undervisningen, endast över tidsplaneringen. Dovermark (2004) visar i sin avhandling att eleverna under eget arbete ofta är sysslösa, att lärarna är stressade och att det sällan förekommer längre genomgångar i helklass. I de sammanhang då undervisning i helklass ändå förekommer visas emellertid att innehållet över tid förändrats från lärarens berättande, genomgång och förhör av läxor till förmån för mer administration, information och instruktion (Sahlström, 2008; Skolverket, 2009b). Som en konsekvens av ökat elevansvar har också möjligheterna till samtal och interaktion med andra i undervisningsgruppen minskat (Granström, 2007; Hensvold, 2006) och i stället har läroboken blivit det dominerande inslaget, med proceduriellt lärande som följd (Johansson, 2006). För att läroboken skall stödja elevernas lärande och erbjuda en grund för fortsatt utveckling har Sönnerhed (2011) visat att läraren behöver ta ansvar för att komplettera läroboken med alternativa perspektiv. Carlgren et al. (2006) menar att man kan tala om en dold läroplan i den senmoderna skolan där eleverna förvandlats till entreprenörer vilka skall ta stort eget ansvar och göra egna val.

Mot den beskrivna bakgrunden är det motiverat att ställa frågan om ett minskat läraransvar för lärandet kan vara en bidragande orsak till de försämrade matematikresultat som noterats i Sverige de senaste decennierna. Mot bakgrund av en ökad skolsegregation med allt mer etniskt och socialt homogena undervisningsgrupper blir frågan om effekter av ansvarsförskjutningen än mer viktig att ställa.

Matematikundervisning

What distinguishes man as a species is not only his capacity for learning, but for teaching as well. (Wood, Bruner, & Ross, 1976, s. 89)

I detta avsnitt presenteras sådana teoretiska utgångspunkter och tidigare forskning som ligger till grund för de olika aspekter av matematikundervisning som belyses i den här avhandlingen. Inledningsvis redovisas teorier för hur vi lär matematik och vilken betydelse läraren har i denna process, samt teorier om matematikundervisningens genomförande. Därefter presenteras teorier som beskriver språkets roll i matematiklärandet och i undervisningen samt undervisningens effekter. Avsnittet avslutas med en jämförelse mellan Vygotskijs och Brousseaus teorier för att utröna om dessa är kompatibla.

Lära matematik

I föregående avsnitt presenterades några grundläggande villkor för elevernas matematiklärande i arbetsformen eget arbete. Det diskuterades hur elevernas möjligheter att föra matematiska resonemang, arbeta med betydelsefulla matematiska uppgifter och prestera goda resultat påverkas av att de själva får ta ett stort ansvar för läroprocessen. Ett sätt att analysera detta är att betrakta denna form av individualisering ur ett lärperspektiv och beskriva elevens aktivitet i själva läroprocessen. I detta avsnitt presenteras därför några grundläggande perspektiv på lärande.

Ur både ett konstruktivistiskt och ett sociokulturellt perspektiv betraktas elevens aktivitet i läroprocessen som betydelsefull, dock belyser perspektiven olika aspekter av aktiviteten. I det konstruktivistiska perspektivet ligger fokus på den omformning av kunskapen som sker inom en person och kunskapen ses där som subjektivt konstruerad i interaktion med omgivningen (Piaget, 1984; Von Glasersfeld, 1995). I det sociokulturella perspektivet däremot, där lärande betraktas som situerat och där kommunikativa processer betraktas som nödvändiga för tänkande och lärande, läggs större vikt vid den omgivande kontexten, undervisningsmiljön (Lave & Wenger, 1991; Säljö, 2000).

Inom den radikalkonstruktivistiska riktningen (Von Glasersfeld, 1995) hävdas att individen i första hand söker kunskap för att lösa problem, inte för att få kunskap om tillvarons ordning och struktur. Eleven betraktas själv konstruera sin kunskap utifrån personliga upplevelser och erfarenheter och kunskapen kan aldrig totalt överföras från en person till en annan, utan den ses som personlig. Det socialkonstruktivistiska perspektivet på lärande betraktar däremot inte kunskapen som helt och hållet personlig utan som gemensamt konstruerad i sociala

kontexter, vilket medför att det inte finns några hinder för att bedöma om elever delar gemensamma kunskaper, inte heller för att diskutera syften och mål med skolundervisning. Om man betraktar elevernas kunskaper som gemensamt konstruerade referensramar blir det i skolundervisningen också möjligt att tolka och diskutera meningen med den nya kunskapen. Socialkonstruktivisterna betonar alltså individens konstruktion av kunskap i relation till deras tidigare erfarenheter, men också hur den omgivande miljön kan påverka kunskapsutvecklingen (Leach & Scott, 2003; Vygotskij, 1978). Genom att inte betona individens biologiska utvecklingssteg som determinanter för kunskapsutvecklingen, vilket Piaget gjorde, öppnar både Bruners (1960) och Vygotskij (1926/1997, 1997) teorier upp för att det är möjligt för alla elever att utveckla sina kunskaper, om den omgivande miljön erbjuder stöd.

Gemensamt för alla konstruktivistiska synsätt är dock att samverkan med andra ses som stödjande för elevens kognitiva utveckling. Denna samverkan är en grund för de kognitiva konflikter som är en förutsättning för att eleven skall kunna omvärdera sin tidigare kunskap (Bruner, 1960; Piaget, 1984; Vygotskij, 1926/1997, 1997). Piagets teorier bygger mer på att samverkan och undervisning inte påverkar barnets utveckling, utan att undervisning endast utnyttjar och utgår ifrån de individuella utvecklingsnivåerna. Socialkonstruktivismen har emellertid utvecklat en teori som är dualistisk med avseende på människan och världen och den bygger på att barnets utveckling har sin grund i två olika processer, en individuell och en som är förknippad med påverkan utifrån, exempelvis undervisning (Lindqvist, 1999). Vygotskij (1997, s. 47) skriver: "We have seen that man's behavior is composed of biological and social features of man's own developmental conditions". Barnets individuella biologiska utveckling betraktas av Vygotskij som en bas utan vilken individen inte skulle kunna existera och på vilken kunskaperna konstrueras.

I den här avhandlingen har lärandet betraktats ur ett vygotskijanskt perspektiv, där lärande uppfattas som en process där mer komplexa strukturer av kunnande kan nås genom interaktion mellan människor och där undervisningsmiljön har en påverkan på elevens utvecklingsprocess (Vygotskij, 1926/1997, 1978, 1997). Elevens personliga erfarenheter är den fundamentala basen för lärandet, ty man kan bara lära sig själv, inte andra, skriver Vygotskij (1997, s. 47): "It is impossible to exert a direct influence on, to produce changes in, another individual, one can only teach oneself, i.e., alter one's own innate reactions, through one's own experience". Till de mer komplexa strukturerna räknar Vygotskij bland annat de kognitiva, de mentala redskapen till vilka språket räknas. Enligt Vygotskij är det inte bara elevens eget sociala agerande som betraktas som ett

villkor för lärande, även den kollektiva kunskapen som är socialt och kulturellt accepterad i samhället (begreppsvärlden) är ett nödvändigt villkor. Nya mer komplexa strukturer av kunnande nås sedan genom psykologiska processer där tidigare strukturer inom individen omformas. Den kulturella förståelsen och den kognitiva utvecklingen kallar Vygotskij internalisation. För att ett barn ska internalisera begrepp och kunskaper förutsätts att det undervisas och har goda relationer med vuxna förebilder. De sociala faktorerna, och inte endast biologiska förutsättningar, påverkar alltså ett barns utveckling. Då dessa perspektiv på lärande appliceras på matematikundervisning framträder betydelsen av att lärmiljön är organiserad på ett sätt som möjliggör sociala aktiviteter och kommunikation, men också att eleverna själva får konstruera sin kunskap. Att utforma och organisera en lärmiljö kan tillskrivas undervisningsansvaret.

Ur Vygotskijs perspektiv är lärarens aktivitet och engagemang viktiga för elevens lärande. Avståndet mellan den rådande utvecklingsnivån hos ett barn och den potentiella utvecklingsnivån barnet kan nå genom interaktion och stöd från en mer kunnig person definieras som barnets utvecklingszon, ”Zone of Proximal Development, ZPD” (Vygotskij, 1986, s. 187). Eleven behöver utmanas utanför sin egen struktur av kunnande för att nå sin potentiella utvecklingsnivå och för detta behöver hon stöttning och vägledning av exempelvis en lärare. Detta synsätt står inte emot Piagets tidigare teori om barns kognitiva utveckling, det kan snarare betraktas som ett komplement till denna teori. Enligt Vygotskij är det eleven som lär sig själv, men lärandet sker tillsammans med andra och med stöd från läraren. ZPD är närmast att betrakta som en utveckling av det socialkonstruktivistiska dualistiska synsättet på lärande till en mer dialektiskt präglad teori om relationer mellan utveckling och undervisning (Vygotskij, 1926/1997). Undervisningen betraktas alltså inte som underordnad barnets utvecklingsnivå och inte heller är det undervisningen som formar elevens kognitiva utveckling. En konsekvens av detta är att läraren i undervisningen måste beakta barnets erfarenheter och tidigare kunnande. Betoningen av det formella kunskapsstoffet i det dualistiska synsättet ersätts i teorin om ZPD av uppfattningen att förmågor och sätt att tänka är mer individuella och situerade. Det blir därför inte lika självklart med Vygotskijs perspektiv att elevernas kunskaper är direkt överförbara till andra kontexter utanför skolan.

Lärarens stödjande funktion i läroprocessen

Enligt Vygotskijs teori om kunskapsutveckling inom ZPD (1986, 1926/1997, 1997) är lärarens aktivitet och engagemang för att exempelvis möjliggöra interaktion och andra sociala aktiviteter centrala (Bruner, 1960; Wood, et al., 1976; Vygotskij, 1926/1997). Lärarens aktivitet och engagemang i stödjandet och

vägledningen av eleverna i deras utvecklingsprocesser innebär emellertid inte att läraren har till uppgift att ”överföra” kunskap eftersom eleverna inte betraktas som passiva mottagare. Emellertid förväntas läraren överföra den delen av svaret till eleverna som handlar om deras egen konstruktion av kunskapen. Ett begrepp som ofta används i sammanhang där lärarens aktivitet och engagemang i elevernas lärprocesser nämns är stöttning, eller ”scaffolding”. Vygotskij själv använde dock aldrig detta begrepp utan det har formats och utvecklats av Bruner (1960, 1985), men begreppet har senare kommit att användas i de sammanhang då Vygotskijs teorier är aktuella. Nedan följer en kort beskrivning av begreppets uppkomst och roll i undervisningsprocessen.

Bruner utvecklade begreppet ”scaffolding” för att beskriva den viktiga funktion som föräldrar har för att stötta sina barn i deras språkutveckling. I Vygotskijs teori om ZPD fann Bruner en motsättning som han inte tyckte att Vygotskij själv utvecklat på ett sätt som belyste den process barnet genomgick inom zonen. Motsättningen kan beskrivas som en outklarad länk mellan det ”goda lärandet”, som Vygotskij (1978, s. 89) benämner det, och målet att nå mer komplexa strukturer av kunnande inom zonen. Bruner ställde sig frågan hur det är möjligt för ett barn att nå dessa högre strukturer av kunnande, vilka karaktäriseras av att barnet är medvetet om fenomenet, eller har intellektuell kontroll över det, eftersom en förutsättning för detta är att de redan har denna medvetenhet eller kontroll innan de kan nå de högre strukturerna. Detta resonemang bygger på Menos paradox som påvisar motsättningen mellan att lära något nytt och att man redan måste ha medvetenhet om fenomenet för att kunna förstå det. Bruner formulerar svaret på sin egen fråga genom att tilldela läraren, eller den mer kompetente personen, rollen som ”ställföreträdande medvetenhet” eller ”intellektuell kontroll” till dess att barnet självt är kapabelt att klara sitt eget handlande genom sin egen medvetenhet och kontroll (1985, s. 24). Fram till dess att barnet klarar detta stödjer läraren lärandet för att göra det möjligt för barnet att internalisera extern kunskap och konvertera den till redskap för medveten kontroll. Detta betecknar Bruner stöttning, ”scaffolding”. Begreppet stöttning har sedan kommit att utgöra en del i den lärteori kallad den aktiva lärprocessen som Bruner utvecklat (1968, 1976, 1983), vilken främst är relaterad till barns personliga språkutveckling och där föräldrarnas, eller lärarens, roll i barnets kunskapsutveckling är central. I den aktiva lärprocessen skall läraren inte bara skapa en social lärmiljö där eleven kan modellera och härma, utan stöttning inkluderar även att förutse eventuella svårigheter som eleven kan uppvisa i lärsituationen samt att vägleda eleven genom lärprocessen. Genom stöttningen kan

eleven lösa problem och nå mål som annars skulle ligga utanför hennes möjligheter. Wood, Bruner och Ross (1976, s. 90) skriver:

This scaffolding consists essentially of the adult "controlling" those elements of the task that are initially beyond the learner's capacity, thus permitting him to concentrate upon and complete only those elements that are within his range of competence.

Syftet med stöttning är enligt Wood et al. att minska graden av frihet i en uppgift till hanterbara gränser, att upprätthålla elevens fokus och riktning, att markera kritiska egenskaper hos det objekt som studeras och kontrollera elevens frustrationer. Syftet är också att visa lösningar på uppgiften när eleven har förutsättningar att förstå och använda dessa. Stöttning kan definieras som det tillfälliga ramverk som sätts upp för att stödja eleven och ge mening till det som lärs, vilket senare tas bort när eleven själv blivit trygg och klarar uppgiften på egen hand.

Centrala utgångspunkter för Bruner är att eleven är en aktiv problemlösare som är redo att utforska "svåra" ämnen och att inläring och undervisning skall fokusera på strukturer snarare än på fakta och tekniker, detta för att eleven skall kunna använda sina kunskaper i nya situationer. Elevens förkunskaper betonas som centrala eftersom nya erfarenheter skall relateras till tidigare förvärvade. Lärande handlar om ett samspel mellan ämnets struktur och elevens inre kognitiva strukturer av kunskap och detta formulerar Bruner på följande sätt:

At each stage of development the child has a characteristic way of viewing the world and explaining it to himself. The task of teaching a subject to a child at any particular age is one of representing the structure of that subject in terms of the child's way of viewing things. (Bruner, 1960, s. 33)

Dessa idéer om relationerna mellan ämnets struktur och individens inre kognitiva strukturer utvecklade Bruner utifrån Piagets teori om kognitiv utveckling. Att utnyttja strukturerna i dessa relationer var enligt Bruner själva innebörden i undervisning och en av lärarens viktigaste uppgifter vid stöttning av eleverna. Bruner, liksom även Vygotskij, baserade sina teorier på att den kognitiva utvecklingen går hand i hand med den påverkan som undervisning har. Detta skiljer sig från Piagets uppfattning då han i stället såg drivkrafterna till kunskapsutveckling inom elevens individuella kognitiva utvecklingssteg. Andra utgångspunkter för Bruner var de samma som för Vygotskij (1978, 1997), nämligen att kunnande är att betrakta som en process, inte en produkt, samt att undervisningens syfte är att eleven skall tänka själv genom att ta del i själva konstruktionen av kunskapen (Bruner, 1971).

Dessa teorier om lärarens betydelse för elevens kunskapsutveckling har utgjort en del av den teoretiska inramningen till denna avhandling då de ger verk-

tyg att analysera den matematikundervisning elever erbjuds. Enligt Bruner (1985) behöver undervisningsmiljön arrangeras på ett sätt som gör att eleven kan nå högre och mer abstrakta plattformar från vilka de kan reflektera när de skall utveckla än mer komplexa strukturer av kunnande och medvetenhet. Bruner utgår från konstruktivistiska och socialkonstruktivistiska idéer, medan Vygotskij utvecklade en mer dialektisk syn på relationen mellan individen och miljön. Båda betonar dock att läraren har ansvar för att stötta och arrangera flera dimensioner av kontextuella förutsättningar för elevens lärande. En sådan dimension är att eleven skall vara aktiv och själv konstruera sin kunskap, att denna inte kan överföras till eleven. En annan är att elevens tidigare erfarenheter är centrala vid etablerandet av nya mer komplexa strukturer av kunnande. I nästa avsnitt redogörs för en teori som mer explicit beskriver hur matematikundervisning kan genomföras (Brousseau, 1997) och som till stora delar utgår från lärarens ansvar för de nämnda dimensionerna.

Undervisa matematik

Betydelsen och förståelsen av den matematikkunskap en elev konstruerar byggs enligt Brousseaus teori om didaktiska situationer upp av en uppsättning regler för handlingar och ageranden i de sammanhang där kunskapen används. Enligt Brousseau kräver detta en större arbetsinsats av eleven än att lära de enskilda kunskapsdelarna. En förutsättning för att lära med förståelse är enligt Brousseau att eleven själva får ta ansvar för sin konstruktion av kunskap samtidigt som läraren tar ett stort ansvar för att stödja elevens läroprocess.

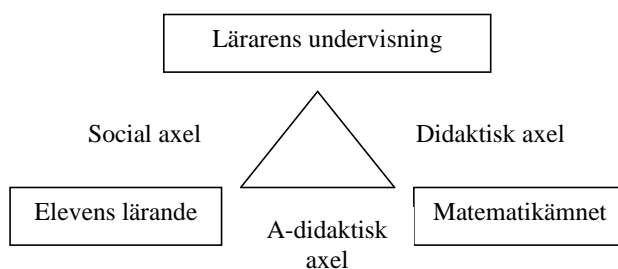
Brousseau belyser två huvudproblem förknippade med matematikundervisningen. Det ena gäller elevens utvecklingsprocess och det andra vilken status elevens eget konstruerade kunnande får. Lärarens verktyg för att hantera dessa problem är institutionalisering av kunskapen. Det första problemet kan beskrivas som den paradox för elevens lärande som berördes i föregående avsnitt, Menos paradox. Det kan alltså vara svårt för en elev att förstå att hon har konstruerat ny kunskap eftersom hon för att förstå det nya redan måste ha kännedom om det. Att läraren i sin undervisning relaterar det matematiska problemet till situationer som eleven väl känner till skulle kunna utgöra ett hinder för att eleven skall få insikten att det faktiskt är ny kunskap hon har konstruerat. Denna paradox kan jämföras med det Bruner (1960, 1985) upplevde som en brist i Vygotskij's teori. Bruner löste dilemmat genom att betrakta läraren som "ställföreträdande medvetenhet" och genom att ge läraren rollen att stötta eleven i hennes läroprocess. Även Brousseau lyfter fram lärarens stöttning som en nödvändig förutsättning för att eleven skall förstå att det är ny kunskap hon har konstruerat.

Lärarens verktyg för att stödja elevens kunskapsutveckling är institutionalisering av kunskapen.

Institutionalisering är således ett redskap som läraren kan använda för att utmana elevens befintliga föreställningar och för att bistå med nödvändigt stöd då eleven utvecklar sitt kunnande genom att själv konstruera sin kunskap. Läraren kan arrangera adidaktiska situationer där förutsättningarna för lärandet huvudsakligen liknar naturliga situationer där eleven ger sig hän åt problemlösning, inte i första hand för att lära sig matematik utan för att hon faktiskt är intresserad av lösningen till problemet. I skolundervisningen är annars det motsatta förhållandet vanligt vilket enligt Brousseau kan utgöra ett hinder för motivation och för att eleven skall lära sig de viktiga reglerna för hur kunskapen används, de regler som är centrala för att eleven senare skall kunna använda kunskapen utanför skolkontexten. Att inom ramen för institutionalisering av kunskapen arrangera adidaktiska situationer betraktas därför av Brousseau som en nödvändig förutsättning för elevens kunskapsutveckling. Genom institutionaliseringen upprättas ett didaktiskt kontrakt mellan lärare och elev vilket innebär att det byggs en bro mellan den adidaktiska och den didaktiska situationen. Eleven får därmed inte eget ansvar för lärprocessen, utan den inramas av lärarens didaktiska arrangemang och övervakning. Man kan betrakta detta som att läraren spelar ett spel som organisatör av de spel eleven spelar i de situationer som inte karaktäriseras av didaktiska intentioner och förväntningar. I de adidaktiska situationerna ansvarar eleven för konstruktionen av sin egen kunskap, men det överordnade ansvaret för att skapa dessa situationer och stötta eleven under lärprocessen ligger enligt Brousseau helt på läraren. Det andra problemet förknippat med matematikundervisning som är en utgångspunkt för institutionalisering av kunskapen är att den kunskap som eleven själv konstruerat i de adidaktiska situationerna skall kunna bli införlivad som socialt och kulturellt accepterad för att på så sätt kunna användas i andra situationer. Om inte elevens egen konstruerade kunskap relateras till etablerade matematiska begrepp och mål som är formulerade för undervisningen kan den förbli individuell och inte en resurs i sammanhang utanför skolkontexten. Institutionalisering har således två syften, att elever skall lära matematik med förståelse och att kunskaperna skall bli socialt och kulturellt accepterade.

Dessa resonemang kan åskådliggöras i Brousseaus modell för didaktiska situationer, se figur 1. Det som inte är föremål för explicit organiserat lärande kallas icke-didaktiska situationer, vilket inte skall förväxlas med de adidaktiska då de senare ingår i det organiserade lärandet. Tre parter är involverade i de didaktiska situationerna; läraren, eleven och ämnet. Relationen mellan dessa kan be-

skrivs med en triangel där hörnen representerar de tre parterna och axlarna relationerna mellan dem. Modellen beskriver interaktionen i lärmiljön.



Figur 1. Didaktisk situation, Brousseau

Den didaktiska situationen betraktas som ett spel mellan olika aktörer som syftar till att eleverna skall skapa lösningar till problem. Till skillnad från traditionell problemlösning erbjuder didaktiska situationer kraftfulla hjälpmedel och genom institutionaliseringen görs kunskaper och beteenden kollektiva. Lärares ansvar är att skapa didaktiska situationer som involverar alla eleverna i klassen och som tillåter eleverna att föreställa sig alternativa lösningar på problemen. Utöver läraren och eleven så finns det också en "tyst aktör" vilken refererar till de regler som är uppsatta i det didaktiska kontraktet där ansvarsfördelningen mellan parterna i spelet regleras. Det är enligt dessa regler som interaktionen uppstår i de didaktiska situationerna. Den sociala axeln, se figur 1, representerar den förhandling som sker mellan läraren och eleven då de beslutar om vilka regler som skall gälla. Den didaktiska axeln representerar just det ansvar som läraren har att både erbjuda förutsättningar för elevens lärande och lämna över ansvar till eleven för hennes eget lärande. Detta skall emellertid inte förväxlas med att läraren har makt att få eleven att lära sig. Eleven har ett eget ansvar att lösa problemen. Termen "devolution", decentralisering, används för att beskriva de aktiviteter läraren initierar i de didaktiska situationerna, vars syften är att få eleven att uppleva problemet som sitt eget och därigenom ta ansvar för att lösa det. Brousseau skriver:

Devolution is the act by which the teacher makes the student accept the responsibility for an (adidactical) learning situation or for a problem, and accepts the consequences of this transfer of this problem. (s. 230)

Eleven skall utsättas för konflikter och få göra misstag samtidigt som hon måste vara trygg i att läraren både tillhandahåller tillräckligt mycket information och kunskap för att hon skall kunna starta sin egen läroprocess. Även under det

självständiga arbetet skall eleven vara trygg i att läraren är stödjande. Mellan det ögonblick då problemet accepteras av eleven och det ögonblick eleven avger ett svar tillkännager emellertid inte läraren sina intentioner med den tänkta kunskap, se den tredje axeln i figur 1. Lösningen på problemen formuleras emellertid i interaktion med läraren som då också verifierar att eleven förstår uppgiften och vad som förväntas av henne i situationen. Elevens tillfälliga felaktiga föreställningar betraktas inte som misslyckanden, men de kan fungera som hinder för fortsatt utveckling av förståelsen för det matematiska objektet och eleven måste därför göras medveten om dem. Dessa hinder, ”obstacle”, är oundvikliga eftersom de konstituerar kunskapen, men de är inte slumpmässiga. Läraren måste därför identifiera dem och skapa didaktiska situationer som möjliggör att eleverna konstruerar nya föreställningar. Om läraren i stället ger all information till eleven så kommer hindren att kvarstå och elevens möjligheter att skapa ny kunskap förhindras. Ett grundantagande i denna teori är alltså att elever själva inte kan ta ett stort ansvar för lärprocessen även om de förväntas ta ansvar för sitt eget lärande. Läraren har ett stort ansvar för att elevens eget arbete präglas av konceptuellt och inte proceduriellt härmande lärande. Läraren har också ett ansvar för att anpassa problemen till elevens förutsättning och ge nödvändig information och kunskap inför det egna arbetet. Dessutom har läraren ansvaret att följa elevens lärprocess och stödja denna, exempelvis genom att låta eleven formulera lösningar på problem i interaktion med läraren. Vad Brousseau däremot inte fokuserar är betydelsen och utformningen av interaktionen och kommunikationen mellan eleverna.

Brousseaus teori om didaktiska situationer kan tas som utgångspunkt för konstruktion av modeller för analys av olika undervisningssituationer. Ett exempel på en tidigare studie där detta är gjort är Lithners (2008) teoretiska ramverk för matematisk argumentation. Detta ramverk skiljer mellan härmande (algoritmisk) och kreativ (nyskapande) argumentation. Genom kreativ argumentation kan eleven exempelvis bli medveten om sina hinder för fortsatt utveckling av förståelse för det matematiska objektet. För att eleven skall nå denna medvetenhet krävs emellertid att läraren tar ansvar för att skapa didaktiska situationer i linje med det som diskuterats ovan. För att analysera vilka dimensioner av detta läraransvar som är väsentliga för elevens kunskapsutveckling har Brousseaus teori om didaktiska situationer utgjort en viktig teoretisk utgångspunkt även i den här studien. En modell för undervisningsansvar har utvecklats och senare använts för att analysera effekter av att läraren tar ansvar för elevernas lärprocesser, i stället för att detta ansvar till stor del vilar på eleverna själva.

Språkets roll i matematiklärandet

Consciousness is reflected in a word as the sun in a drop of water. A word relates to consciousness as a living cell relates to a whole organism, as an atom relates to the universe. A word is a microcosm of human consciousness. (Vygotskij, 1986, s. 256)

Relationen mellan språk och tänkande, om tänkandet föregår språket eller om det är språket som föregår tänkande, illustrerar Piagets och Vygotskijs syn på språkets roll i läroprocessen. Språket som en viktig förutsättning för lärandet framhålls i både Piagets och Vygotskijs teorier om hur barn utvecklar kunskaper, men representerar två olika synsätt på språkets roll. En utgångspunkt för Piaget är att språket uttrycker det man redan tänkt och att det betraktas som medfött och mentalt, samt att det opererar bortom medvetandet (Piaget, 1984; Silby, 2000). Enligt Vygotskij betraktas däremot inte språket som medfött eller som ett uttryck för det man redan tänkt. Språket ses snarare som en nödvändig förutsättning för tänkandet: "Thought is not merely expressed in words; it comes into existence through them" (Vygotskij, 1986, s. 218). Tänkan­de kan ses som inre kommunikation med sig själv. Innebörden i ett begrepp betraktas som en förening av ord och tanke där relationen dem emellan beskrivs av en process som i sin tur utvecklar innebörden i begreppet. Mekanismer som påverkar denna utveckling är inte enbart barnets individuella utveckling utan även det sätt som begreppet används på. Av detta följer också att vi tänker och uppfattar saker och ting på ett sätt som möjliggörs av det språk vi tillägnat oss och därigenom blir begrepp som inte är kodade i detta språk inte heller tillgängliga för individen (Silby, 2000). Enligt dessa teorier går därför möjligheterna att utveckla sin matematiska förståelse hand i hand med möjligheterna att utveckla sitt språk. Språket är samtidigt ett medierande verktyg och något som utvecklas under läroprocessen, vilket understryker betydelsen av att matematikundervisningen erbjuder samtal och kommunikation för att eleverna skall kunna utveckla både sin matematiska och sin språkliga kompetens.

I ett kognitivistiskt perspektiv intresserar man sig främst för förståelse av tänkande och lärande så som det påstås ske inom individen. Piaget gav inte kulturen och den omgivande miljön något stort utrymme i barnets psykologiska utveckling. Enligt Vygotskij har däremot kultur och miljö en given plats tillsammans med språket. En implikation är då att de resurser människor förfogar över, dit språket hör, och hur stor del av dessa som görs tillgängliga i undervisningen är viktigt (Bruner, 2002). Forskningsfrågorna för min studie kretsar mycket kring samspel mellan individer i det flerspråkiga matematikklassrummet, vilket inkluderar alla de resurser eleverna har samt de resurser som ställs till deras förfogande. För att belysa effekter av olika dimensioner av ansvar i matematik-

undervisningen har det därför varit angeläget att beakta både språk och miljöaspekter. Som diskuterades ovan är språket viktigt om man antar att kunskap växer fram i möten mellan människor där tidigare erfarenheter möter nya upplevelser och där det vardagliga samtalet är en viktig komponent i elevens konstruktion av kunskap. Kunskapen betraktas då som diskursiv, vilket bland annat innebär att den är språklig (Säljö, 2000). Språket är också en förutsättning för möjligheten att lagra kunskap, att minnas. Kunskapen förs på så sätt från en tid till en annan vilket gör att den inte kan betraktas som helt individuell (Bruner, 1982, 1983, 2002; Säljö, 2000). Att kunskapen är diskursiv betyder enligt Bruner att den uppstår i en social situation där även kulturellt överförda kunskaper införlivas med de individuella. Hur språket fungerar som verktyg för internalisering, att förklara världen, var av centralt intresse för Vygotskij (1986). Internalisering, vilket innebär att vi underordnar oss konventionella sätt att förstå ord, leder till att barnet utvecklas kognitivt och får en kulturell förståelse. Elevens språkliga resurser och den språkliga kontext där lärandet sker betraktas av Vygotskij som en viktig förutsättning för elevens möjligheter att lära.

Även om ord och begrepp inom matematikdidaktisk forskning ofta betraktas som färdigkodade med en bestämd innebörd så finns det många studier som tar sin utgångspunkt i att språket är kontextberoende. I dessa studier visas att begrepps tvetydighet inte behöver medföra problem i matematikundervisningen, utan tvärt om kan det verka som en länk mellan tänkande och diskurs och utgöra en resurs i undervisningen (Barwell & Clarkson, 2004). Då språket betraktas som kontextberoende och som ett verktyg i lärandet behöver inte flerspråkighet te sig som ett problem, vilket det emellertid kan göra om begreppens innebörd ses som färdigkodade och bestämda och om lärarens uppgift anses vara att förmedla denna innebörd till eleverna. De resultat som Morgan (2005) har kommit fram till i en studie som visar effekter av att betrakta matematiska begrepp som entydiga är i linje med dessa resonemang. Hon konstaterar att matematiska texter på högre nivåer inom utbildningssystemet inte presenterar definitioner av matematiska begrepp som entydiga och förutbestämda, utan i stället stimulerar dessa texter till avancerat matematiskt tänkande. De spelar också en roll i argumentation och vid val mellan alternativa definitioner av samma objekt. På mellannivåer i utbildningssystemet spelar däremot definitionerna inte motsvarande roll. Där stimulerar de inte till matematiskt kreativt tänkande eftersom de endast presenterar notationer för redan existerande begrepp. Morgan diskuterar att man på denna mellannivå konstruerar elever på ”lägre nivå”, både genom att på förhand utgå ifrån att de mest är intresserade av vardagsfrågor och dessutom genom att inte stimulera dem till eget tänkande och värderande av innebörden i

matematiska objekt. Tvetydigheten i matematiska begrepp är grunden för den argumentation som bidrar till elevers utvecklande av förståelse för begrepp och matematiska aktiviteter. För att denna utveckling skall komma till stånd behöver undervisningen karakteriseras av denna grundsyn på innebörden i matematiska ord och begrepp, men också av ett arbetssätt som bjuder in eleverna till engagemang och aktivitet konstaterar Morgan (2005):

Induction into mathematical practices must involve students in developing ways of speaking and writing that enable them to engage in these [mathematical] activities. (s. 115)

Detta perspektiv på matematikundervisning är i linje med Lithners (2008) teoretiska ramverk för matematisk argumentation vilket tidigare refererades. Ytterligare en aspekt av språkets roll är hur väl individer behärskar detta språk. Forskning inom detta område pekar mot att det har betydelse hur väl flerspråkiga elever har utvecklat sina språkkompetenser såväl i modersmålet som i undervisningsspråket. Det finns kritiska nivåer i språkutvecklingen som är viktiga att eleverna har nått för att utan hinder kunna tillägna sig olika ämneskunskaper. Dessa tröskeleffekter påverkar hur väl de lyckas i sitt lärande då undervisningen bedrivs på deras andraspråk konstaterar Cummins och Swain (1986). Om flerspråkiga elever har välutvecklade språkkompetenser i både modersmålet och undervisningsspråket verkar flerspråkigheten inte som ett hinder för deras förutsättningar att lära, snarare tvärt om. Om däremot något eller båda språken inte är så välutvecklade är det hämmande för elevens möjligheter att lära, vilket visas i flera olika studier (Cummins & Swain, 1986; Ellerton & Clarkson, 1996; Seceda, 1992; Silby, 2000). Att utveckla tillfredställande bra kompetenser i ett andraspråk för att fullt ut kunna följa undervisning på detta språk tar fem till tio år i en rik språkmiljö och ett basordförråd utvecklas på två år enligt Collier och Thomas (2002). Enligt Cummins (2000) kan det räcka med ett till två år för att utveckla vardagsspråket och fem till sju år för att det skall bli fullt utvecklat. Bortsett från dessa smärre avvikelser förutsätts språkstöd i någon form behövas för många flerspråkiga elever. Studier visar också att om eleverna får språkhandledning från den undervisande ämnesläraren, genom exempelvis explicita förklaringar och regler för ord och begrepp, och om dessa förklaringar överensstämmer med deras mer informella språkkompetenser, ges de flerspråkiga eleverna en större chans att lära sig ett skolämne som matematik (Elmeroth, 2006; Jamieson, Chapelle, & Preiss, 2004).

Cummins teorier om tröskeleffekter och betydelsen av att ha båda sina språk väl utvecklade stöds av flera empiriska studier. Finska elever som i ett projekt undervisats på ett främmande språk presterade lika bra eller bättre i

matematik än de elever som undervisats traditionellt på finska, visar Jäppinen (2005). För vietnamesiska elever i Australien har Clarkson (2007) visat att det inte behövde vara en belastning för matematikprestationerna att vara tvåspråkig. Det gemensamma för dessa studier är att de elever som hade väl utvecklade kompetenser i både modersmål och undervisningsspråk kunde dra nytta av detta i sin kunskapsutveckling i matematik, bland annat genom att de kunde göra inre översättningar och få fler referenspunkter vilket både ökade förståelsen och minnet. De presterade lika bra eller bättre än övriga elever. Den forskning som lyfter fram komplikationerna som kan uppstå för flerspråkiga elever visar exempelvis att bristande språkkompetens kan leda till ett lågt deltagande i matematikundervisningen med sämre matematikprestationer som följd (Setati, 2001).

Forskning på området förhåller sig alltså på olika sätt till innebörden i ord och begrepp. Den riktning som ser betydelsen av ord som diskursiv, att den är beroende av individens konstruktion av exempelvis matematisk mening (se t.ex, Barwell, 2005a; Moschkovich, 2007; Säljö, 2000), står i kontrast till den formella modellen där det matematiska språket betraktas som fritt från tveksamheter och otydligheter (se t.ex, Pimm, 1987). Barwell (2005a) har jämfört den ”formella språkmodellen” som präglar styrdokumentet i Storbritannien med den faktiska dialogen i matematikklassrummet och visat att innebörden i matematiska begrepp skapas genom diskursiva sociala aktiviteter i klassrummet. Moschkovich (2007) har beskrivit den komplexa bilden av hur lärare använder två språk i undervisningen och hur flerspråkiga elever kommunicerar matematik under lektionerna och Säljö (2000) har studerat hur elevprestationerna på matematiktest är relaterade till den kontext de genomförs i. I den traditionella skolan har man exempelvis undersökt hur olika register av ord och uttryck, vardagliga och matematiska, används av olika grupper och med vilka syften (Pimm, 1995). Oberoende av hur man förhåller sig till innebörden i ord och begrepp finns det emellertid en samsyn på att flerspråkiga elever behöver språklig handledning och hjälp för sin kunskapsbildning i matematik.

Ovanstående teorier och empiriska forskningsresultat kan sammanfattas med att både elevens språkliga resurser och den språkliga kontext som matematikundervisningen utgör är viktiga förutsättningar för elevens möjligheter att lära matematik. Om utgångspunkten är att alla elevens språkresurser används som verktyg för lärandet betraktas inte flerspråkighet som ett problem. Vidare, om man utgår från att innebörden i matematiska begrepp skapas genom diskursiva sociala aktiviteter i klassrummet följer att eleverna skall bjudas in till olika sociala aktiviteter där deras förståelse av matematiken utvecklas.

Matematikundervisning i det flerspråkiga klassrummet

Det finns ett konstaterat samband mellan å ena sidan elevers språkkompetenser i både undervisningsspråket och modersmålet och å andra sidan deras matematikprestationer (Grouws, 1992, kap. 23). Allt för stor vikt skall trots det inte läggas vid detta samband, enligt Grouws, eftersom förhållandet är så komplext att det inte direkt går att dra slutsatsen att det är språkkompetenserna som har effekt på prestationsnivåerna. Andra bakomliggande orsaker, som elevens ursprungsland, tid i landet, kön och familjernas sociala och ekonomiska bakgrund, samvarierar med språkkompetenser och matematikprestationer. Även hur mycket undervisningsspråket och modersmålet används i hemmet är relaterat till matematikprestationerna. En annan möjlig bakomliggande orsak skulle kunna vara effekter av den matematikundervisning eleverna erbjuds. I detta avsnitt behandlas först det språkstöd flerspråkiga elever kan få i den svenska grundskolan, därefter språkets roll i matematiklärandet och avslutningsvis matematikundervisning i grupper med flerspråkiga elever.

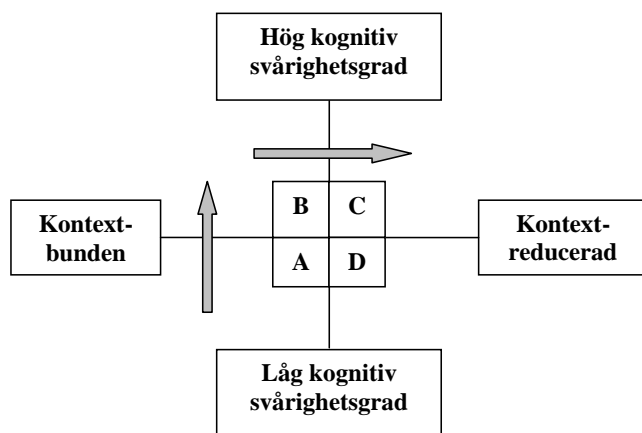
När begreppet flerspråkig fortsättningsvis används syftas på den definition som gjorts av Skolverket (2002) som innebär att de elever som använder minst två språk i eller utanför klassrummet och vars modersmål är ett annat än svenska definieras som flerspråkiga. Begreppen tvåspråkig och flerspråkig används synonymt eftersom fokus är på fenomenet att eleven har ett modersmål som avviker från undervisningsspråket, inte på antalet modersmål. Begreppet utländsk bakgrund används också synonymt med flerspråkig. Elever med utländsk bakgrund definieras av Skolverket (2005) som elever födda i eller utanför Sverige där båda föräldrarna är födda utomlands. Denna elevgrupp är emellertid inte identisk med de flerspråkiga eleverna eftersom man kan tänka sig att det finns elever med utländsk bakgrund som inte talar annat än svenska hemma. Denna bias kan alltså förekomma i den här avhandlingen. En anledning till att begreppen använts synonymt är bland annat att det inte varit möjligt att identifiera i vilken betydelse de använts i olika sammanhang. I den tidigare forskning som refereras har begreppen använts med delvis olika betydelser. Officiell statistik är oftast redovisad utifrån ”utländsk bakgrund” medan kartläggningar av undervisningsvillkor ofta talar om ”flerspråkiga” elever. I vissa källor har det dessutom inte varit möjligt att avgöra vilken av definitionerna som åsyftats.

Teoretiska utgångspunkter i den här studien är att lärarens vägledning av eleverna inom deras individuella utvecklingszoner är viktig för deras kunskapsutveckling och att språket har en central roll i läroprocessen. Betydelsen av att i undervisningen beakta elevernas språkliga förutsättningar och kulturella erfarenheter har tidigare belysts av exempelvis Parszyk (1999) och Sjögren (1993). I

Bruners teori om ”scaffolding” beskrivs betydelsen av föräldrarnas stöttning för att barnen skall erhålla instinktiva strukturer för sin fortsatta språkutveckling. Teorin utgår ifrån att barnets tidigare kunskaper och erfarenheter utgör den plattform som ny kunskap konstrueras utifrån, därför lär sig barn exempelvis ett andra språk bäst genom att relatera det till sin tidigare språkkunskap. Av detta följer att det är väsentligt att flerspråkiga elever bereds möjlighet att utveckla båda sina språk, inte endast sitt andraspråk, vilket också överensstämmer med det som tidigare diskuterades om språkutveckling. Med utgångspunkt i dessa teorier följer att läraren har ansvar för att organisera och genomföra matematikundervisningen så att eleverna kan använda sina språk för interaktion och samtal och för sin egen kunskapsbildning. Gibbons (2006) beskriver med dessa teoretiska utgångspunkter en progressiv undervisningsmodell med interaktion mellan lärare och elever där båda spelar en aktiv roll i lärprocessen. En undervisningsmodell där lärarens uppgift i stället betraktas vara att föra över kunskap till eleven, sätta in kunskapskapital på elevens minnesbank, kallar Gibbons för en bankmodell och i en sådan kan flerspråkiga elever missgynnas om man inte tar hänsyn till deras speciella behov av språkstöd. Om det i undervisningen relateras till elevernas tidigare erfarenheter kan det i ”bankmodellen” finnas ytterligare risk att flerspråkiga elever missgynnas (Cooper & Harries, 2002, 2005), ty deras erfarenheter avviker ofta från majoritetsgruppens och om inte det beaktas i undervisningen kan deras socioekonomiska bakgrund få ett stort inflytande över lärandet, enligt Cooper och Harries. I exempelvis Bruners (1968, 1976, 1983) undervisningsteori, den aktiva lärprocessen, betraktas elevens tidigare erfarenheter och kunskaper i stället som centrala att utgå ifrån då läraren stöttar elevens kunskapsutveckling. Om detta speglas mot Coopers och Harries farhågor att elever med erfarenheter som avviker från ”mainstream” riskerar att missgynnas i undervisningssituationer framstår orsakerna till att flerspråkiga elever inte presterar lika väl i matematik som deras svenska kamrater som mycket komplexa.

Inte bara flerspråkiga elevers språkkompetenser, utan även vilka möjligheter de har att använda språkresurserna i lärprocessen påverkar studieresultaten (Cummins, 1984; Setati & Adler, 2000). För dessa elever är det betydelsefullt att de får använda alla sina språk i kognitivt och språkligt utmanande situationer (Barwell, 2003; Gibbons, 2006). För att möjliggöra detta behöver läraren ta ansvar för att organisera och ordna undervisningen så att språk och kommunikation blir aktiva komponenter. Cummins (1996) har utvecklat en modell för undervisning som lyfter fram samspelet mellan kognitiv och språklig svårighetsgrad där den språkliga svårighetsgraden uttrycks som språkets kontextberoende, se figur 2. Läraren ansvarar enligt denna modell för att stödja de flerspråkiga ele-

vernas utveckling från en låg kognitiv nivå och ett språk relaterat till elevernas vardagskontexter, mot högre kognitiv nivå där språket används som ett mentalt verktyg för tänkandet och är fritt från kontextberoende. Lärarens stöttning syftar till att eleven skall bli självständig och senare kunna klara sig utan lärarens stöd. Enligt Cummins behövs därför anpassade arbetssätt där flerspråkiga elever ges möjlighet att utveckla språk och andra skolämnen samtidigt. Denna syn på språkets roll överensstämmer med Vygotskijs syn på språk som ett medierande verktyg och att språkutvecklingen går hand i hand med begreppsbyggnaden.



Figur 2. Cummins fyrfältsmodell över språkbehärskninng och kognitiva utmaningar

Interaktion mellan elever med olika språkkompetenser karaktäriseras av språkliga förhandlingar där olika signaler på bristande förståelse gör att eleverna anpassar och modifierar språket och innehållet i interaktionen (Lindberg, 2004). Flerspråkiga elever kan i sådant samarbete påverka det språk som används och göra det mer begripligt genom att de signalerar förståelse eller brist på förståelse. De söker bekräftelse och ber om upprepningar och förtydliganden. I de flesta samtal förekommer förhandlingar liknande dessa konstaterar Long (1983), som också utvecklat en interaktionsteori. Enligt denna teori är det väsentligt att eleven erbjuds arbetsformer som möjliggör samtal och argumentation med kamrater när de skall lära sig ett nytt språk och det är även viktigt att gruppmedlemmarna är på olika språkliga nivåer för att utvecklande språkliga förhandlingar skall uppstå enligt Long. Eftersom flerspråkiga elever parallellt med att de lär matematik också utvecklar sina språkkompetenser finns det anledning tro att interaktionsteoriens idéer är giltiga även för matematikundervisningen. Teorin belyser det väsentliga i att eleverna själva är aktiva i social interaktion med andra i klassrummet

men att läraren samtidigt vägleder dem i deras kunskapsutveckling och att undervisningsgrupperna är språkligt och kognitivt heterogena.

Som tidigare nämnts presterar inte elever med utländsk bakgrund lika höga resultat i matematik som sina kamrater med svensk bakgrund, men vilken roll flerspråkigheten spelar i detta sammanhang är inte klarlagt. Det finns studier som visar att det inte har någon större betydelse för matematiklärandet om barnen lär på sitt andraspråk (Clarkson, 2007; Davidenko, 2000; Jäppinen, 2005), medan andra studier visar att flerspråkighet på många olika sätt är ett hinder eller en komplikation i matematiklärandet och att flerspråkigheten har en komplicerad relation till undervisningen (Barton & Neville Barton, 2003; Seceda, 1992; Setati, 2001, 2005; Setati & Adler, 2000). Området betraktas inte heller som så väl beforskat (Barwell, 2005b; Rönneberg & Rönneberg, 2001). I Sydafrika har man emellertid en lång tradition av flerspråkighet i undervisningen vilket också har bidragit till att det där bedrivits mycket forskning kring komplexiteten i de flerspråkiga elevernas matematiklärande. I flera studier visas att klassrummets språkmiljö har betydelse både för undervisningens utformning och för resultaten, där kodväxling⁷ är ett exempel på en sådan miljö (Setati & Adler, 2000). Gemensamt för sydafrikanska forskningsansatser är att de tar som utgångspunkt att språket är en social produkt som uppstått ur ett politiskt och kulturellt sammanhang vilket har betydelse för hur språkets meningsbärande funktion betraktas i matematikundervisningen. Setati (2001) skriver:

All language practices occur in contexts where language is a carrier of symbolic power. This aspect shapes the selection and use of language(s) and mathematical discourses. (s. 18)

Sydafrikanska studier visar att flerspråkiga elevers matematikprestationer gynnas om man i undervisningen beaktar flerspråkigheten genom att exempelvis låta eleverna använda kodväxling. Utanför Sydafrika uppvisas inte denna samstämmighet i forskningsresultaten vilket kan bero på att språkförhållandena i Sydafrika skiljer sig från länder med invandrad befolkning. Å ena sidan visar vissa studier att det bästa är att låta eleverna bli undervisade på sitt förstaspråk (Ellerton & Clarkson, 1996) medan det å andra sidan finns forskning som visar att det är framgångsrikt om eleverna får använda alla sina språkresurser. Det senare kan sammanfattas med följande citat:

Maybe, with some adjustments – specifically inviting these students to add their thoughts, encouraging them to use their native languages and asking others to translate,

⁷ Att man medvetet och/eller ändamålsenligt skiftar mellan språken. Antingen sätter man in ett ord eller en fras från det ena språket i ett yttrande på det andra språket eller så byter man språk vid satsgränsen (Arnberg, 2004)

slowing down the fast-pace tempo of the classroom, creating an atmosphere in which language variation in the community of discourse is an accepted fact of life – these methods can apply to bilingual learners. (Seceda, 1996, s. 440)

Att språket inte endast består av vokabulär utan även av gester, bilder och en mängd olika uttrycksformer är något att beakta i matematikundervisningen ty flerspråkiga elever visar sig både kunna lära matematik och uttrycka sitt kunskande bättre om undervisningen tillåter och uppmuntrar användning av olika uttrycksformer (Moschkovich, 2002).

Mot bakgrund av teorier och forskningsresultat om betydelsen av lärares stöttning och vägledning av flerspråkiga elevers kunskapsutveckling i matematik, samt betydelsen av samtal, interaktion och språklig förhandling, finns det anledning att undersöka vilka effekterna blir för elevers lärande om undervisningen kännetecknas av ett stort inslag av elevansvar för lärprocessen.

Språkstödet i grundskolan

Språkstödet till de flerspråkiga eleverna i grundskolan regleras i olika förordningar och lagar och består av modersmålsundervisning, svenska som andraspråk och studiehandledning på annat modersmål än svenska. I en lägesbeskrivning (Skolverket, 2006a) för nyanlända elever till den svenska grundskolan visas emellertid att vissa kommuner inte efterlever föreskrifterna på ett godtagbart sätt. Detta sägs bero på såväl bristande resurser, dålig organisation, brist på lärare som på bristande kunskaper. Av alla elever som är berättigade till modersmålsundervisning har endast 54 % studerat ämnet sedan början av 2000-talet. Studiehandledning är också sällsynt enligt rapporten.

Oavsett bakgrund har alla elever i Sverige samma rätt till utbildning. De elever som har ett annat modersmål än svenska har dock en del speciella rättigheter som är knutna till språket och ursprunget. Kommunerna är skyldiga att leva upp till de läroplanskrav som stödjer barns utveckling av både sitt modersmål och det svenska språket. Det innebär bland annat att barnen har rätt till modersmålsundervisning i grundskolan under förutsättning att de talar ett annat språk än svenska i hemmet. Om det är få barn i kommunen som talar språket eller om det inte är möjligt att finna en lämplig lärare, behöver dock inte kommunen anordna undervisningen. Studierna kan bedrivas inom timplanebunden tid eller helt utanför denna. Undervisningen syftar till att främja elevernas dubbla kulturella identitet och kulturkompetens. Dessa studier ses som generellt viktiga för elevernas kunskapsutveckling inom skolans ämnen. I kursplanen (Skolverket, 2000) är detta formulerat på följande sätt:

Lärande är starkt förknippat med modersmålet och att befästa kunskaper i det egna språket är en väg till att lära också på svenska. Ämnet har därför det viktiga uppdraget att stödja eleverna i deras kunskapsutveckling. (s. 37)

I ett av strävansmålen i kursplanen är det formulerat att eleverna skall ”lära sig att använda sitt modersmål som medel för sin kunskapsutveckling och på så sätt tillägna sig ett ord- och begreppsörråd inom olika områden”. För ämnet matematik skulle detta innebära att eleverna genom modersmålsundervisningen får tillgång till ämnets ord och begrepp. Eftersom modersmålsundervisning är frivilligt kommer emellertid inte alla elever att få detta stöd när de skall utveckla denna kompetens.

För att tillgodogöra sig skolans undervisning i olika ämnen har eleverna också möjlighet att få studiehandledning på sitt modersmål. Det är rektor på de enskilda skolorna som avgör om en elev behöver studiehandledning eller ej. Till sist kan även nämnas att elever med utländsk bakgrund också har rätt att läsa svenska som andraspråk i stället för ämnet svenska. Kunskapskraven är då likvärdiga i de båda ämnena och ger samma behörighet till fortsatta studier.

Matematikundervisningens effekter

I detta avsnitt presenteras tidigare forskning kring olika faktorer som kan ha effekter på elevers matematikprestationer. Om lärande betraktas som en process där mer komplexa strukturer av kunnande nås genom tänkande och de olika sociala aktiviteter som föregår tänkandet, finns också ett ansvar att utforma matematikundervisning som möjliggör dessa processer. Med utgångspunkt i de teorier som tidigare belysts (Brousseau, 1997; Bruner, 1960, 1985; Cummins, 1984; Gibbons, 2002; Vygotskij, 1926/1997, 1986, 1997) ligger ett stort ansvar hos läraren för att utforma lärmiljön och vägleda eleverna i deras lärprocesser. I enlighet med dessa teorier har läraren också ansvar för att lämna över ansvar till eleverna för deras egen konstruktion av kunskap. Även att välja matematikinnehåll relaterat till olika mål för undervisningen kan betraktas som lärarens undervisningsansvar.

Matematikundervisning beskrivs i flera sammanhang som antingen lärar- eller elevcentrerad, eller som mer eller mindre aktiv undervisning. Med lärarcentrerad undervisning menas att den huvudsakligen utgår från läraren och att det företrädesvis är standardlösningar som presenteras av uppgifterna (Hattie, 2009). Undervisningsnivån riktar sig mest till medel- eller högpresterande elever men med ett tempo som baseras på återkoppling från de lågpresterande eleverna, konstaterar Hattie. Med elevcentrerad undervisning menas att den i stället har fokus på att eleverna själva tillåts konstruera sin kunskap och att andra än stan-

dardlösningar presenteras. Inte i någon av dessa undervisningsmodeller problematiseras emellertid lärar- och elevperspektivet samtidigt. Det kan innebära att lärarcentrerad undervisning kan ha olika mycket inslag av elevaktivitet utan att det framkommer (Mok & Morris, 2001). Även elevcentrerad undervisning skulle kunna ha olika mycket läraraktivitet. Som alternativ till att kategorisera undervisning som lärar- och elevcentrerad framhåller Hattie (2009) att den i stället kan kategoriseras som mer eller mindre aktiv. I stället för att utgå från läroböcker eller timplaner så utgår man i den aktiva undervisningen från det önskade resultatet, målet. Syftet med den typen av undervisning är enligt Hattie att eleverna förutom ämneskunskaper även skall lära sig hur de själva lär sig och varför samarbete med andra är viktigt för lärandet. Eleverna förutsätts i den aktiva undervisningen att vara mer aktiva än de är i den lärarcentrerade undervisningen och till skillnad från den elevcentrerade arbetar de mot tydliga mål. Men inte heller med denna kategorisering av undervisningen är det möjligt att samtidigt belysa lärarens och elevens aktivitet och engagemang i lärprocessen. Den fortsatta genomgången i detta avsnitt av tidigare forskning om effekter av olika undervisningsstrategier kommer att relateras till olika dimensioner av ansvar för undervisningen i stället för de beskrivna kategorierna.

Kunskapsbildning i matematik i flerspråkiga klassrum har studerats inom olika forskningstraditioner. En sådan är den policy-baserade forskningen med syfte att bidra till en önskad samhällsutveckling av både sociala och ekonomiska faktorer. Under 1900-talets senare decennier var denna forskning vanlig, framför allt i USA (Grouws, 1992, kap. 23). Syftet har ofta varit att påvisa effekter av viss intervention i undervisningen. Främst har man i dessa undersökningar studerat om gapet mellan olika elevgruppers prestationer ökat eller minskat av specifika insatser. Forskningsresultaten har emellertid visat sig svårtolkade och några generella slutsatser har sällan kunnat dras exempelvis beroende på ett komplext förhållande mellan lärarförväntningar och elevprestationer, fastslår Grouws. Senare forskning har emellertid klarlagt vissa effekter av intervention i undervisningen, där exempelvis Shayer och Adhami (2007) belyst sambandet mellan gruppammansättning med avseende på kunskapsnivåer och lärarens sätt att undervisa matematik. I denna studie visades att det fanns ett positivt samband mellan kamrateffekter och prestationer om den kunskapsmässiga spridningen var stor i gruppen. Detta samband villkorades dock av att den intervention som gjordes i undervisningen karaktäriserades av att lärarna utnyttjade den kunskapsmässiga spridningen i gruppen. Ytterligare en orsak till tolkningsproblem vid studier av interventionseffekter är inflytandet från olika individuella bakgrundsfaktorer. Efter hand övergick därför studierna från

interventionsstudier till att mer söka beskriva skillnader i sätt att lära mellan olika elevgrupper. I svensk forskning har exempelvis betydelsen av elevernas tolkningsredskap för deras möjligheter att uttrycka sig och förstå problem studerats, där resultaten indikerar att elever med en annan kulturell bakgrund än svensk har sämre förutsättningar att tillgodogöra sig undervisningen (Hyltenstam, 1993; Wellros, 1998). I linje med dessa resultat har Parszyk (1999) och Sjögren (1993) poängterat betydelsen av att både undervisning och elevers förutsättningar att lära matematik sätts in i ett kulturellt sammanhang, där exempelvis språket utgör en viktig faktor.

Andra praktikinrä studier har haft till syfte att exempelvis belysa samband mellan elevers språkliga nivåer och deras matematikprestationer. Komplexiteten av påverkan från många olika faktorer inom elevgrupperna har emellertid varit så stor i dessa studier att det sällan varit möjligt att dra generella slutsatser om språknivåns betydelse. Hur länge eleverna bott i det nya landet, kön, hur mycket modersmålet talats i hemmet, social klass och ursprungsland visade sig påverka prestationerna. På senare tid finns det emellertid studier som påvisat specifikt inflytande av elevernas språk, exempelvis att de skall ha nått kritiska nivåer i språkutvecklingen för att utan hinder kunna tillägna sig andra ämneskunskaper (Clarkson, 2007; Jäppinen, 2005; Riordain & O'Donoghue, 2009; Setati, 2001). En annan forskningstradition inom fältet matematikundervisning och flerspråkighet är den sociokulturella. I stället för att belysa påverkan från individuella egenskaper och erfarenheter har man inom denna studerat den sociala interaktionen mellan individer. Med utgångspunkt i en sådan ansats har det exempelvis visats att flerspråkiga elever både kan lära matematik och uttrycka sitt kunnande om undervisningen stimulerar socialt samspel och användning av olika uttrycksformer (Moschkovich, 2002). I exempelvis Sydafrika, som är dominerat av flerspråkighet, har forskningen länge haft denna inriktning och det finns resultat som visar att klassrummets språkmiljö har stor betydelse för flerspråkiga elevers kunskapsbildning (Setati & Adler, 2000).

Sammantaget kan man säga att forskning under senare år kring matematikundervisning i flerspråkiga klassrum ofta har berört kulturella aspekter, där kunskap och lärande har betraktats som funktioner av en persons olika erfarenheter och kulturella resurser relaterade till ett socialt sammanhang (Lester, 2007). Även om forskningen har dominerats av att belysa betydelsen av olika individuella bakgrundsfaktorer så är det också visat att matematikklassrummet är en social miljö som erbjuder viktiga villkor för elevers kunskapsbildning i matematik.

Redan i Colemanrapporten (J S Coleman et al., 1966) belystes både individuella och kontextuella bakgrundsfaktorerers betydelse för elevers möjligheter till goda prestationer i skolämnen. Denna omfattande studie av skolans och undervisningens betydelse för elevernas skolprestationer genomfördes i USA där man undersökte variationen i prestationer mellan elevgrupper från olika socioekonomiska bakgrunder. Resultaten visade att de största variationerna fanns inom skolorna, inte mellan dem, vilket mot bakgrund av strukturerna i det amerikanska samhället vid denna tid tydde på att de individuella bakgrundsfaktorerna trots allt hade stort inflytande. Förutom elevernas socioekonomiska bakgrund visade sig även deras etniska ursprung vara relaterat till prestationerna. Utöver att elevernas individuella bakgrunder förklarade prestationsnivåerna visade sig även lärarkompetensen ha betydelse.

Den klassrumsforskning som i dag bedrivs i Sverige präglas inte av syftet att belysa relationer mellan undervisning och elevprestationer (Skolverket, 2009b). Enligt den trend som beskrevs ovan har i stället klassrumsforskningen förskjutits mot studier av sociala och kommunikativa perspektiv där interaktionen i sig har betraktats som både lärande och resultat av undervisningen. Sahlström (2008) kommenterar i en rapport från Vetenskapsrådet att dessa studier alltmer begränsats till fallstudier: ”Detta [explicit situerade analyser, där syftet allt mer sällan är att etablera ett system för kategorisering av stora material] har fått genomslag inom det analytiska arbetets alla dimensioner, där det idag är vanligare med analyser av små och begränsade material än vad som var fallet i klassrumsforskningens tidiga utveckling” (s. 9). Det sägs emellertid i Skolverkets rapport att stora förhoppningar varit ställda på att få fram tydliga anvisningar om hur undervisningen bäst bör genomföras för att bli framgångsrik, vilket förutsätter forskningsresultat med större potential till generaliseringar.

I den internationella forskningen har man också lyft fram betydelsen av både individuella förutsättningar och undervisning, men till skillnad från den svenska forskningen har man också studerat vilka effekter dessa har för elevernas prestationer. Exempelvis har man studerat effekter av lärarkompetens, differentiering, grupsammansättning och undervisningsstrategier. Man har också studerat effekter av exempelvis elevernas kognitiva förmågor, språkkompetens och socioekonomiska statusvariabler. I en sammanställning av över 800 metaanalyser baserad på mer än 50 000 studier presenteras sådan internationell forskning (Hattie, 2009). Några tydliga anvisningar om effektiva undervisningsmetoder är emellertid inte det som utmärker forskningsresultaten: ”It is less the ”methods” per se, than the principles of effective teaching and learning that matter” (s 245), framhåller Hattie. Den forskning som påvisat effekt av undervis-

ning lyfter fram betydelsen av att läraren levandegör undervisningen, får högre precision i kartläggningen av elevernas studief framgångar och kan erbjuda effektiva strategier för undervisning och lärande. Även tydligt formulerade syften och mål, återkoppling från elev till lärare, formativ bedömning och kommunikation och interaktion i klassrummet har visats vara viktiga. Det handlar alltså inte, enligt Hatties sammanställning, om att den ena eller andra metoden är bättre än andra, utan snarare om att läraren tar ett ansvar för undervisningen, samtidigt som läraren skall behärska en vid repertoar av metoder.

Generella insatser för att individualisera undervisningen, exempelvis genom nivåindelade undervisningsgrupper, har inte visat sig vara effektivt, men däremot om man individualiserat utifrån elevens särskilda behov, visar Hattie (2009). I linje med dessa resultat visar Skolverket (2009b) att individualiserad undervisning med elevens individuella förutsättningar och behov i centrum har positiva effekter, medan däremot generell individualiserad undervisning i form av individuellt arbete inte är framgångsrikt. För att kunna anpassa undervisningen till elevens individuella behov framhålls i rapporten betydelsen av att läraren är aktiv, har god kännedom om elevernas behov samt relevant kompetens.

Under de senaste decennierna har det i internationell forskning blivit allt vanligare att analysera effekter av mer komplexa undervisningsmönster och undervisningsprocesser inom specifika ämnesdomäner i stället för effekter av mer avgränsade åtgärder. I en meta-analys av Seidel och Shavelson (2007) visas att de områdesspecifika processerna, exempelvis inom matematik, har de högsta effekterna på elevernas prestationer. Seidel och Shavelson visar också att det är mer betydelsefullt med ämnesspecifika aktiviteter än att organisera undervisningen på ett speciellt sätt, som exempelvis grupparbeten. Dessa resultat visade sig också vara stabila över årskurserna. Forskarna pekar dessutom på betydelsen av att eleverna stöttas och vägleds i sina olika aktiviteter och inte endast blir försedda med utmanande matematikuppgifter. Med utgångspunkt i resultaten i Seidel och Shavelsons studie har Baumert et al. (2010) undersökt vilken betydelse lärares ämnes- respektive ämnesdidaktiska kunskaper har för undervisningens kvalitet och för elevernas prestationer i matematik. Man fann att det som mest förklarade olika klassers prestationsnivåer var lärarens ämnesdidaktiska kompetens. Effekten av denna medierades helt genom hur väl lärarna genom att välja matematikuppgifter lyckades stimulera eleverna till kognitiva aktiviteter och hur väl de lyckades anpassa undervisningen till styrdokumentens intentioner. Effekten av den ämnesdidaktiska kompetensen påverkades också av hur väl lärarna lyckades stödja eleverna i deras egna lärprocesser. Lärarnas ämneskunskaper skall trots den svaga direkta effekten på både undervisningens utformning

och elevernas resultat ändå tolkas som betydelsefulla, konstaterar Baumert et al., då de kan betraktas som en förutsättning för den ämnesdidaktiska skickligheten. Baumerts et al. studie visar hur viktigt det är att lärarna på ett aktivt sätt skapar relevanta kognitiva strukturer för elevernas matematiklärande.

Avslutningsvis kan man konstatera att resultat av tidigare forskningen om kunskapsbildning i matematik i flerspråkiga klassrum varierat över tid och med avseende på forskningsobjekt och forskningstraditioner. Forskningen har berört betydelsen av både elevers individuella förutsättningar att lära matematik och olika kontextuella faktorer. Dessutom har såväl både interaktionen i klassrummet och elevernas lärprocesser som effekter av olika individuella och kontextuella faktorer studerats. Resultat från tidigare forskning som har relevans för den här avhandlingen visar positiva effekter på elevers matematikprestationer om lärare tar ansvar för att exempelvis ordna undervisningen så att interaktion och andra sociala aktiviteter möjliggörs och om de vägleder eleverna på ett aktivt sätt i deras lärprocesser i matematik. För elever med migrationsbakgrund handlar det också om att möjliggöra deras språkutveckling inom både modersmålet och undervisningsspråket. Resultaten visar också på betydelsen av att eleverna själva får konstruera sitt kunnande, att det inte är lärarens uppgift att "överföra" kunskap till eleverna. Även betydelsen av ämnesspecifika aktiviteterna belyses.

Överensstämmelsen mellan Vygotskijs och Brousseaus teorier

Som avslutning på detta avsnitt om matematikundervisning problematiseras de epistemologiska förutsättningarna för att belysa undervisning i flerspråkiga klassrum med utgångspunkt i Vygotskijs och Brousseaus teorier om lärande och undervisning. Kompatibiliteten mellan teoriernas grundsyn på framför allt forskningsobjekt och kunskap ligger till grund för möjligheten att utnyttja dem som ramverk för formulering av hypoteser samt vid analys av resultaten.

Då Piagets kognitivistiska teorier och konstruktivismen utgör bakgrund för både Vygotskijs och Brousseaus utvecklade teorier redogör jag inledningsvis för några centrala delar i dessa. Med ett konstruktivistiskt lärperspektiv beskrivs företrädesvis det som händer inom en person och inte vad som ger upphov till det. Barnet anses själv konstruera sitt tänkande och sin kunskap, och därigenom betraktas kunskap som en mental konstruktion. I motsats till den behavioristiska tanken om att inläring endast sker utifrån ett registrerande av externa stimuli bygger de konstruktivistiska teorierna på att barnet är aktivt i sin inlärningsprocess. Utvecklingen som sker successivt är beroende av alla barnets erfarenheter och kognitionsfunktionen är ett instrument för adaptation vilket hjälper till att passa in individen i sin erfarenhetsvärld (Piaget, 1984). Adaptation innebär att kognitiva strukturer ombildas genom en växelverkande process mellan assimila-

tion, där en erfarenhet passas in i en befintlig begreppsmässig struktur, och ackommodation, där ett tidigare schema byts ut mot ett nytt. Nya scheman som bildats befästs därefter genom aktiva handlingar. Trots att socialt samspel enligt Piaget betraktas som en förutsättning för barnets utveckling så betraktas de biologiska funktionerna som de styrande. Dessa kognitivistiska teorier har tydliga strukturalistiska drag vilket exempelvis framträder i de strukturerade utvecklingsstadierna och barnets konstruerade kognitiva strukturer (Piaget, 1968). Von Glasersfeld (1995) införde begreppet radikalkonstruktivism för att understryka den syn på verkligheten som Piaget utvecklat, vilken innebär att barnet genom sin aktivitet självt konstruerar föreställningar om världen och inte adapterar verklig kunskap.

Phillips (1995) anser att Vygotskij, med ett individperspektiv på konstruktion av kunskap, är en av centralfigurerna i de konstruktivistiska riktningarna. Däremot visar Phillips att Vygotskij skiljer sig markant från Piaget med avseende på vilka mekanismer han anser ligga bakom barnets lärande och utveckling. I motsats till Piagets betoning av de individuella biologiska mekanismerna fokuserar Vygotskij på betydelsen av de sociala faktorerna. Brousseau (1997), som även han har ett individperspektiv på barnets lärande och utveckling, utgår också från Piagets kognitivistiska teorier. På samma sätt som Vygotskij betonar inte heller Brousseau den biologiska utvecklingen som en grundförutsättning, men till skillnad från Vygotskij betonar Brousseau inte heller interaktionens och kommunikationens betydelse. De mekanismer för barnets lärande och utveckling som Brousseau belyser i sin teori handlar mera om didaktiska strukturer i undervisningsmiljön.

Barnets aktivitet är central i adaptationsprocessen så som den beskrivs av Piaget, och på samma sätt är den central för både Vygotskij och Brousseau. I Brousseaus teori om didaktiska situationer beskriver begreppet ”situation of action” den centrala roll som elevens eget agerande har i de didaktiska spelen där eleven utvecklar sitt kunnande och sina problemlösningstrategier. Ett av de spel som läraren iscensätter är ”devolution”, där decentraliseringen till elevnivå av själva lärprocessen bygger på att eleven får möta matematiska problem som liknar verkligheten och upplevs fria från didaktiska intentioner. I stället för att kommunicera kunskapen till eleven skriver Brousseau att det är nödvändigt att eleven själv är aktiv för att nå högre och mer komplexa strukturer av kunnande:

But learning these roles [rules about how knowledge is used in different situations] seems more costly (or, indeed, impossible) to obtain by the communication of knowledge than by the autonomous and adaptive productions of the subject herself. (Brousseau, 1997, s. 229)

Brousseau utgår från att barnet bygger upp sina kognitiva strukturer genom att adaptera den ”verkliga” kunskapen. Teorin om didaktiska situationer utgår inte ifrån att dessa kognitiva strukturer representerar helt individuella kunskaper, utan visar i stället vägar för att transformera dem till gemensam och kulturellt accepterad kunskap. Även om detta synsätt kan sägas strida mot det radikalkonstruktivistiska, så uttrycker Brousseau i andra sammanhang idéer som skulle kunna hänföras till radikalkonstruktivistiska föreställningar. Läraren skall exempelvis utforma lärsituationer för eleven på ett sådant sätt ”that she produces her knowing as a personal answer to a question...” (s. 228), och vidare skall inte läraren betrakta elevens tillfälliga felaktiga föreställningar som misslyckanden utan acceptera alla individuella lösningar. I dessa exempel behöver det emellertid inte innebära att Brousseau går förbi den kulturellt accepterade kunskapen ty de personliga svaren som eleven producerar skall som jag nämnde också anpassas till de villkor som ställs upp i den miljö där de är konstruerade och de felaktiga lösningarna skall under lärarens handledning korrigeras eftersom de annars kan utgöra hinder för fortsatt utveckling av förståelsen för det matematiska objektet. Kunskapsobjektet relateras således till ”verkliga” objekt och inte till elevens subjektiva konstruktioner och det görs allmänt. Brousseau har också själv uttryckt att han är kritisk till en radikalkonstruktivistisk föreställning, nämligen den föreställningen att elevens individuellt konstruerade matematikkunskaper med automatik skulle leda till allmänna socialt och kulturellt accepterade standardkunskaper, ”le savoir savant” (Radford, 2007). Hans utgångspunkt är i stället att elevens subjektivt konstruerade kunskaper även kräver ett externt perspektiv. Genom institutionalisering av kunskapen åstadkommes detta. Elever kan inte själva förstå eller känna till vilken status den individuellt konstruerade kunskapen har utan hjälp från en lärare som lyfter fram sådana resonemang och metoder som värderas i matematiksamhället, enligt Brousseau. Vad gäller motivet att söka kunskap kan man emellertid säga att det finns vissa likheter med radikalkonstruktivismen där individens syfte inte anses vara att sträva efter att få kunskap om tillvarons ordning och struktur utan främst att lösa de problem hon står inför. Detta synsätt präglar den bakomliggande idén till de didaktiska situationerna i Brousseaus teori där elevens motivation anses öka om situationerna inte präglas av didaktiska intentioner och förväntningar utan i stället stimulerar elevens lust att lösa problemen.

Synen på hur den individuellt konstruerade kunskapen skall erhålla denna status som socialt och kulturellt accepterad är ytterligare en faktor som indikerar de båda teoriernas kompatibilitet. Det är i klassrummet som eleven reflekterar över kunskapen i relation till historisk och kulturell verklighet, ett möte mellan

subjektet och objektet sker således i klassrummet. Att elevens konstruerade kunskap skall kunna användas i nya situationer förutsätter att den har denna status annars måste individen skapa ny kunskap i varje ny kontext. Radford (2007) kallar denna process för objektifiering av den subjektiva kunskapen. Enligt Brousseau har läraren ansvaret att införliva elevens individuella kunskap i sociala och kulturella strukturer och denna process kallas då institutionalisering av kunskapen. Brousseau skriver: "Situations of institutionalization are those by which the cognitive status of knowledge or a piece of knowledge is fixed conventionally and explicitly" (s. 215). Även för Vygotskij är denna frågeställning central men där anses objektifieringen ske genom interaktionen och kommunikationen i klassrummet. Sociala och kulturella dimensioner av kunskapen förs där över mellan de personer som ingår i kontexten: "an individual has the capacity to externalize and share with other members of her social group her understanding of their shared experience" (Vygotskij, 1978, s. 132). Enligt Vygotskij innebär emellertid inte objektifieringen av kunskapen att den är direkt överförbar till nya sammanhang eftersom kontexter inte ses som neutrala. Om institutionalisering kan betraktas som en tillräcklig förutsättning eller ej för att kunskapen skall kunna användas i nya sammanhang är inte lika tydligt problematiserat i Brousseaus teori. Begreppet internalisering i Vygotskijs teori beskriver ur ett psykologiskt perspektiv den process som leder till att ett barn utvecklar sin kulturella och kognitiva förståelse, och för detta behöver barnet undervisas och ha goda relationer till vuxna förebilder. Begreppet institutionalisering i Brousseaus teori beskriver internaliseringen ur ett annat perspektiv. Brousseau tar undervisningens perspektiv och begreppet kan snarast betraktas representera den mekanism som möjliggör internaliseringen, lärarens verktyg för detta. Man kan här konstatera att objektifiering är centralt i båda teorierna, dock betraktat ur olika perspektiv. Vygotskij betonar de sociala processerna i individens internalisering av kulturell och kognitiv förståelse medan Brousseau betonar de individuella processerna ur ett undervisningsperspektiv. Radford (2007) kritiserar Brousseau för att han betonar de individuella processerna och menar att det spel eleverna spelar i de didaktiska situationerna mer bygger på idén att eleven är autonom än att hon behöver hjälp av andra. Att det förhåller sig så illustreras väl av följande uttalande av Brousseau:

One of the fundamental contributions of modern didactic consists of showing the importance of the role played in the teaching process by the learning phases in which the student works almost alone on a problem or in a situation for which she assumes the maximum responsibility. (Brousseau, 1997, s. 229)

En vanlig förskjutning inom konstruktivismen under senare decennier har varit mot ett ökat intresse för gemensamt konstruerade kunskaper. Denna övergång har inneburit att kunskap inte kan betraktas som helt och hållet individuell. Som diskuterats ovan finns det i utbildningssammanhang ett behov av gemensamt konstruerade referensramar för att göra det möjligt att tolka och komma fram till vilken innebörd kunskapen har. Via institutionalisering har läraren enligt Brousseau till uppgift att relatera elevernas individuella kunskaper till existerande referensramar snarare än att stimulera elevernas gemensamma konstruktion av dessa ramar. Piagets och framför allt radikalkonstruktivisternas (Von Glasersfeld, 1995) betoning av kunskapen som individuell uppfattas av socialkonstruktivister som problematisk då de i stället vill betrakta den som konstruerad i gemenskaper (Leach & Scott, 2003). Dels medför idén att alla elever konstruerar individuell kunskap svårigheter att bedöma om elever delar några gemensamma kunskaper, som Radford (2007) diskuterade, dels blir det problematiskt att diskutera undervisningens syften och mål menar de. Följande uttalande av Von Glasersfeld visar emellertid att dessa olikheter mellan radikal- och socialkonstruktivister inte beskriver några vattentäta skott utan snarare skillnader i vad man fokuserar.

But what a scientist – or indeed any reflective person – categorizes as his or her environment and then causally relates to observed behaviour, is always a part of that observer's domain of experience and not an independent external world. (Von Glasersfeld, 1995, s. 15)

Även om Brousseau inte betonar att elever konstruerar sin kunskap gemensamt med andra i undervisningsmiljön förhåller sig teorin till miljöns betydelse för elevers kunskapsbildning. Med stöd i sina egna erfarenheter anpassar eleven sig till en miljö som erbjuder motsättningar, svårigheter och obalanser på ett sätt som det mänskliga sociala samhället gör. Men miljön i sig är inte en tillräcklig förutsättning för lärande enligt Brousseau, den didaktiska dimensionen är också nödvändig: "But a milieu without didactical intentions is manifestly insufficient to induce in the student all the cultural knowledge that we wish her to acquire" (s.30). Även för Vygotskij är miljön central för de processer som leder till elevers lärande och utveckling, men då med mera fokus på betydelsen av de sociala aktiviteterna. Det individuella medvetandet utvecklas genom internalisering som dels består av social samverkan mellan individer, men också av individens interna processer. Internalisering handlar inte bara om att överta någonting utan också om att appropriera vilket innebär att individen gör något till sitt eget. Dessa processer kan jämföras med den betydelse Brousseau tillskriver elevens möte med undervisningsmiljön, dock med den skillnaden att Brousseau inte betonar det sociala samspelet. Vygotskij belyser sådana mekanismer som förklarar de proces-

ser som leder till internalisering. I internaliseringsprocessen medieras mentala funktioner med hjälp av fysiska och intellektuella redskap där språket betraktas som centralt då det länkar samman det sociala planet med individens förståelse. Motsvarande processer är inte centrala i Brousseaus teori.

Även om Vygotskij, liknande som Brousseau, framhåller lärarens betydelse för elevens lärande och utveckling, finns det nyansskillnader i deras syn på lärarens roll. Enligt Vygotskij, samt i Bruners (1960) utveckling av begreppet stöttning, fokuseras lärarens stödjande roll i elevens läroprocess, medan lärarens roll enligt Brousseau mer fokuseras på ordnandet av miljön samt på anpassningen av den individuella kunskapen till att bli socialt och kulturellt accepterad. Vygotskij tar sin utgångspunkt i kognitivistiska teorier, men assimilationsprocessen förutsätts kräva en annan persons medverkan och inte ske i isolation (1926/1997). I skolundervisningen representeras denna person av läraren och för att förklara förhållandet mellan undervisning och barnets utveckling utvecklade Vygotskij teorin om den närmaste proximala utvecklingszonen, ZPD: "The discrepancy between a child's actual mental age and the level he reaches in solving problems with assistance indicates the zone of his proximal development" (Vygotskij, 1986, s. 187). Vygotskij skiljer mellan lärande och utveckling, där undervisning som erbjuder väl organiserat lärande anses vara en förutsättning för att sätta flera utvecklingsprocesser i rörelse (Vygotskij, 1978, s. 90). Även Brousseau tar Piagets kognitivistiska teori som utgångspunkt då han i sin teori om didaktiska situationer visar betydelsen av undervisningsmiljöns erbjudande av situationer som på ett dialektiskt sätt bidrar till att eleven utvecklar sin begrepps-förståelse (Brousseau, 1997, s. 64). Läraren har även i denna teori en central roll för att stödja elevens kunskapsutveckling och hon skall exempelvis rekontextualisera och repersonifiera den matematiska kunskapen, låta miljön efterlikna ett vetenskapligt mikrosamhälle och erbjuda eleverna verktyg för att upptäcka en kulturell och kommunicerbar matematisk kunskap (s. 23). I mycket överlappar således teorierna varandra och även om inte Brousseau talar om utvecklingszoner lyfter han fram betydelsen av att eleven utmanas i relation till sin förförståelse. Lärarens roll i elevens internaliseringsprocess är inte att överföra kunskap till eleven, inte heller att helt överlämna ansvaret för lärandet till eleven, lärarens roll är något mycket viktigare än så skriver Vygotskij (Vygotskij, 1997, s. 48). I den sociala miljön skapar läraren genom dialog med barnet en potentiell utveckling: "The teacher is the director of the social environment in the classroom, the governor and guide of the interaction between the educational process and the student" (Vygotskij, 1997, s. 49). Brousseau betonar däremot inte dialog och interaktion lika tydligt. Dock diskuterar Brousseau värdet av ett precist matema-

tiskt språkbruk vid kommunikationen i klassrummet samt språkets betydelse som verktyg för att formulera frågor och lösningar på problem. I stället för dialog och interaktion fokuserar Brousseau på hur läraren kan skapa adidaktiska situationer där eleven med intresse och engagemang löser problem som inte förknippas med didaktiska syften. Lärarens verktyg för detta är institutionalisering. Även om lärarens uppgift enligt Vygotskij är att följa varje elevs lärprocess och vara förtrogen med elevens förkunskaper är det emellertid viktigt att undervisningen struktureras på ett sätt som möjliggör för eleven att själv lära sig, och denna syn på undervisningen och lärarens roll har Vygotskij gemensam med Brousseau.

Avslutningsvis diskuterar jag om de olikheter som finns mellan de båda teorierna har betydelse för deras kompatibilitet. Sfard (1998) visar hur utvecklingen har gått från en syn på lärande som passivt mottagande till aktivt konstruerande av kunskap (konstruktivism) och därefter till att betrakta lärande som kunskap överförd från ett socialt till ett individuellt plan och internaliserat av den lärande (situerat lärande). Hon diskuterar teorierna utifrån de metaforer som beskriver dem och gör gällande att det inte går att renodla lärteorierna så som ofta görs, utan att man i stället behöver ta delar av båda, både från den som beskrivs med Acquisition Metaphor (AM) och från den som beskrivs med Participation Metaphor (PM). Sfard är kritisk till att kunskapen i AM betraktas som en intellektuell ägodel vilken kan användas i olika sammanhang och konstaterar att detta individualistiska perspektiv kan föda rivalitet snarare än samarbete. Men trots detta konstaterar Sfard att kunskap inom AM inte betraktas som helt oberoende av sammanhang och andra villkor där den konstrueras eller tillämpas. Kontexten har alltså betydelse för AM. I metaforen PM är människan subjektet i stället för att kunskapen är det och honnørsord som indikerar kontextens betydelse är vanliga. Individens agerande kommer mera i centrum i PM och inte vad individen presterar. Trots att kunskapen inom PM betraktas som situerad och inte som en ägodel att förflytta till olika sammanhang konstaterar Sfard att detta inte innebär att all kunskap måste läras på nytt i alla nya situationer eftersom syftet med lärandet är att vara bättre rustad i möten med nya situationer. Detta innebär att kunskap återupprepas när det är möjligt men ändras när det behövs. Som en konsekvens av dessa resonemang diskuterar Sfard att eftersom både den individualistiska och den sociala dimensionen finns med i båda teorierna, så utgör inte dessa två dimensioner en skiljelinje när man diskuterar kunskapens tillkomst eller tillämpning. De båda dimensionerna har bara olika status inom teorierna, där exempelvis den sociala dimensionen, som belyser vad som sker mellan aktörerna, inte alls behöver vara frånvarande i AM, men är ett villkor i PM. AM och PM

kan därför betraktas tillhöra samma kategori av lärteori men placerade på olika ställen på de sociala och individuella dimensionernas axlar.

Då jag relaterar Brousseaus och Vygotskij's teorier till det resonemang Sford för om skiljelinjer mellan olika lärteorier konstaterar jag att det finns olikheter mellan teorierna, framför allt vad gäller synen på individuell och social dimension då eleven konstruerar sina kunskaper. I Brousseaus teori om didaktiska situationer är inte betydelsen av interaktion och samtal mellan eleverna framträdande. Brousseau framhåller i stället värdet av att eleverna blir autonoma. Man kan här konstatera att Brousseaus teori vilar mot en traditionell konstruktivistisk lärteori där fokus är på de individuella mentala processerna och inte på de sociala sammanhang där kunskapen etableras. Vygotskij tar däremot sin utgångspunkt i betydelsen av ord och kommunikation. Efter att språk initialt i ett barns liv fungerar som en brygga till sociala kontakter övergår det till att även spela en central roll i barnets kognitiva processer: ”The cognitive and communicative functions of language then become the basis of a new and superior form of activity in children, distinguishing them from animals” (Vygotskij, 1978, s. 28). Detta exemplifieras också av följande uttalande om barns begreppsbildning:

In both [the two lines as the process of conceptual understanding follows], the use of the word is an integral part of the developing processes, and the word maintains its guiding function in the formation of genuine concepts, to which these processes lead. (Vygotskij, 1986, s. 145)

Även om Sford hävdar att dessa olika perspektiv på den sociala dimensionen inte behöver vara oförenliga tycker hon emellertid att den centrala konstruktivistiska idén om att den lärande konstruerar sina egna förståelsestrukturer är mycket problematisk och hon tycker inte att teorin ger en grund för att förklara hur vi kan anta att var och en bygger strukturer som är kongruenta med andras strukturer, det vill säga hur människor bygger länkar mellan individuell och kollektiv kunskap. Brousseau löser detta dilemma genom att i sin teori lyfta in lärarens betydelse för att förankra och styra in elevernas individuellt konstruerade kunskaper i ett socialt och kulturellt accepterat sammanhang. På så sätt kommer Brousseau förbi att den individuellt konstruerade kunskapen förblir individuell och denna process benämns institutionalisering av kunskapen. Enligt Vygotskij utgör visserligen lärares aktivitet och engagemang en betydelsefull förutsättning för elevernas utveckling inom sina proximala utvecklingszoner, ZPD, men betoningen ligger mer på betydelse för kunskapsutveckling än på den dimension av institutionaliseringen som handlar om att göra kunskapen socialt och kulturellt accepterad. Detta kan bero på att Vygotskij utgår ifrån att kunskapsbildningen inte sker i ensamhet, utan i interaktion med den omgivande miljön där den kol-

lektiva kunskapen finns inbäddad. Den andra aspekten av det individuella och det sociala, tillämpning av kunskapen, skiljer sig inte lika tydligt mellan Brousseau och Vygotskij. Brousseau som utgår mycket från Piaget gör gällande att barnet kan tillämpa den förvärvade kunskapen i en rad situationer, medan det för Vygotskij inte är lika troligt att detta kan ske utan att barnet lär sig att relatera kunskaperna och färdigheterna till nya situationer, till en början under vuxnas ledning.

Det som Sfard lyfter fram som karaktäristika för PM, kontextens och lärarens betydelse för lärandet och för kontinuiteten så att den lärande blir en integrerad del av en praktik, återfinns till stor del i Vygotskijs teorier. Även om eleven framträder som den ensamme entreprenören i Brousseaus teori finns även där kopplingar till dessa karaktäristika. Brousseaus teori ligger dessutom inte i första hand till grund för studier av elevers begreppsbyggnad i matematik, utan snarare för studier av relationer mellan olika aktörer i den matematikdidaktiska miljön. Frågan varför den konstruktivistiska förankringen då är så framträdande känns berättigad. Som Sfard skriver kan det bero på att denna lärteori bidrar med väsentliga utgångspunkter för förklaring av kunskapens överföring och tillämpning i olika situationer, men det skulle även kunna bero på att den konstruktivistiska och strukturalistiska traditionen är mycket stark bland franska teoretiker. Brousseaus teori har emellertid, precis som Vygotskijs, kommit att utgöra ett fundament för att formulera undervisningens roll för individens lärande. I och med att teorin belyser det ansvar läraren har för att skapa motiverande icke-didaktiska situationer, bygga undervisningen på elevernas tidigare erfarenheter samt för att utmana elevernas tidigare uppfattningar så finns det paralleller till centrala delar av Vygotskijs teori. Exempel på sådana centrala delar är den proximala utvecklingszonen, kontextens betydelse för lärandet samt betydelsen av lärarens stöttning av elevernas kunskapsutveckling.

De båda teorierna kan således betraktas tillhöra samma kategori av lärteori, dock med vissa skiljaktigheter vad gäller deras placering på de sociala och individuella dimensionernas axlar. Eftersom de följaktligen kan betraktas som kompatibla och att komplettera varandra på ett meningsfullt sätt finns förutsättningar att kombinera dem för att formulera hypoteser om undervisningsstrukturer där både lärarens ansvar och aktivitet samt elevens egen konstruktion av kunskap är centrala delar. Om endast Brousseaus teori om didaktiska situationer ligger till grund för hypotesformuleringarna saknas till stor del språk, interaktion och kommunikationsdimensionerna. Om endast Vygotskijs teorier ligger till grund för hypotesformuleringarna saknas väsentliga teoretiska utgångspunkter för lärarens ansvar att strukturera matematikundervisningen. För studierna i det här av-

handlingsprojektet har därför både Brousseaus och Vygotskijs teorier kommit att utgöra det teoretiska ramverket.

Gruppsammansättning

I detta avsnitt presenteras forskningsresultat som beskriver olika effekter av undervisningsgruppers sammansättning.

Som framgått tidigare har läroplansreformerna under 1900-talets andra hälft präglats av tveksamhet till sammanhållen matematikundervisning och olika differentieringsåtgärder har förekommit under en längre tid i matematik än i de flesta andra skolämnen. En grundläggande orsak till denna differentieringsiver har varit en syn på begåvning som en konstant faktor, opåverkbar av yttre förhållanden. Forskning har emellertid visat att begåvningsnivån i en befolkning ökar och således inte är konstant (Flynn, 1987). Dock finns det tecken på att begåvningen inte fortsätter att öka inom vissa av de mest utvecklade länderna i världen (Svensson, 2008). En faktor som skulle kunna bidra till ökningen av begåvningsnivån över tid är utbildning och det finns studier som också styrkt att skolundervisning har denna effekt (Cliffordson & Gustafsson, 2008; Härnqvist, 1968).

Tidigare forskning pekar mot att undervisning som bygger på differentiering utifrån begåvnings- eller prestationsfaktorer, inte leder till högre elevprestationer. Hanushek och Wössman (2006) visade genom att använda data från IEAs och OECDs internationella kunskapsmätningar PISA 2003 och PIRLS 2001 att tidigt differentierad skolundervisning leder till större spridning av elevernas resultat samt till lägre prestationsnivåer. Resultaten visar att kunskaps-spridningen ökade från skolår 4 till skolår 8 i differentierade skolsystem. Skoleffekten kan därför sägas vara låg i länder med tidig differentiering. I länder med sammanhållen skola påvisades däremot större skoleffekter. Resultaten visar att Sverige trots sin formellt sammanhållna grundskola uppvisar resultat som är jämförbara med de länder som har tidig differentiering. I ett internationellt perspektiv har Sverige i likhet med övriga nordiska länder en lång tradition av sammanhållen grundskola och sen differentiering till gymnasiet och andra utbildningsvägar. Men som tidigare nämnts har inte detta gällt för matematikundervisningen, vilket skulle kunna förklara de överraskande resultaten i Hanushek och Wössmans (2006) studie. Emellertid har Sverige sedan 1994 en läroplan som inte längre särbehandlar ämnet matematik i detta avseende. Det finns därför anledning att undersöka fler eventuella bakomliggande orsaker än differentiering till de sjunkande prestationsnivåerna och den ökade spridningen av matematikresultaten.

Resultat från den tidigare nämnda studien av Shayer & Adhami (2007) pekar i samma riktning som Hanushek och Wössmans studie, att kunskapsmässig

variation i undervisningsgrupperna kan påverka elevernas kunskapsutveckling på ett positivt sätt. De skriver:

... their skill was in vain because of a lack of higher-ability children in the class who could supply to the less able students the "successful performances" they needed to witness to extend their ZPDs. Both in the collaborative small group work and in the whole class discussions the collective ZPD was too limited to act as a spur to their cognitive development. (s. 285)

Även Flynn (2007) visade att de sociala effekterna är av betydelse. Gruppmedlemmar kan i sociala sammanhang påverka varandra i positiva eller negativa spiraler (Dickens & Flynn, 2001). Enligt Flynn behövs kognitiva utmaningar och en rik kognitiv miljö för att elevers intelligens och kunnande skall utvecklas. Även i ett undervisningsprogram utvecklat av Adey och Shayer (1993), "cognitive acceleration program", visas att elevernas kognitiva utveckling är starkt beroende av den interaktion som sker mellan eleverna. Lärarens uppgift betraktades i detta program som stödjande och stimulerande för samverkan och diskutering mellan kamrater emellan. Att kamrateffekter existerar är styrkt i många studier (Gustafsson, 2006; Hattie, 2009). Genomgående handlar kamrateffekterna om betydelsen av kunskapspridning i undervisningsgruppen och då främst om den positiva effekten för lågpresterande elever av att det finns mer högpresterande kamrater i gruppen (Sund, 2007; Zimmer & Toma, 2000). Hoxby (2000) påvisar betydande kamrateffekter i främst matematik och då i synnerhet för de lägre åldrarna. Det finns emellertid forskning som visar att kamrateffekterna är starkare för språk än för matematik (Schneeweis & Winter-Ebmer, 2007; Zimmerman, 2003). Dessa resultat kan eventuellt indikera ett samband mellan hur mycket social interaktion som förekommer i klassrummet och graden av kamrateffekter.

Trots att en differentiering av matematikundervisningen utifrån begåvnings- eller prestationsfaktorer inte längre formellt stöds av styrdokumentet för grundskolan är det tänkbart att olika samhällsförändringar och undervisningstrender ändå kan ha liknande effekter. Exempelvis har det skett en ökad skolsegregation, ökad decentralisering av beslutsfattandet över utbildningen, ökad differentiering som stödåtgärd för elever med särskilda behov samt ökad individualisering genom nivåindelade grupper (Skolverket, 2009b). Dessa förändringar har lett till allt mer homogena undervisningsgrupper. Skolsegregationen, vilken kan benämnas horisontell segregation (Willms, 2010), kännetecknas av bland annat variation i socioekonomisk status mellan skolorna samt av att klassmässiga skillnader i prestationsresultat kvarstår, trots det formellt likvärdiga skolsystemet (Skolverket, 2009b). Att skolsegregation uppvisar negativa effekter på prestationerna och att elevernas familjebakgrunder fått ökad betydelse kan tyda på att

skolan och den utbildning eleverna erbjuds inte är en tydlig motkraft till inflytande från homogena undervisningsgrupper.

Nivåindelade grupperingar inom skolorna, vilka kan benämnas vertikal segregation (Willms, 2010), kännetecknas av att eleverna är differentierade till olika undervisningsgrupper utifrån skolprestationer. Det svenska skolsystemet har ingen formell vertikal segregation, men genom decentraliseringen av beslutsfattandet finns lokala möjligheter att organisera undervisningen på detta sätt, vilket också görs (Skolverket, 2007, 2009b). En annan orsak till vertikal segregation än nivåindelade grupperingar är att skolan ofta hanterar elever i behov av stöd med särskiljande lösningar (Skolverket, 2009b). Bakom denna särskiljning av eleverna kan ligga en tendens att individualisera olika skolproblem i stället för att se dem som orsakade av undervisningsmiljön. Sammantaget tyder också svenska forskningsresultat på att det är svårt att påvisa generella positiva effekter av sådana stödinsatser för eleverna. Även arbetsformer med stort inslag av elevansvar för läroprocesserna, exempelvis eget arbete, skulle kunna leda till effekter liknande de för horisontell och vertikal segregation. Förutom att ökat elevansvar kan vara en konsekvens av en allmän individualiseringstrend (Carlgren, et al., 2006), skulle det även kunna vara ett sätt att möta elever i behov av stöd. Kamrateffekter och lärarförväntningar skulle i sådana homogena grupper emellertid kunna förstärka varandra, vilket kan ha en negativ effekt på prestationerna (Skolverket, 2006b).

När relationerna mellan grupsammansättning, matematikundervisningens utformning och elevernas prestationer undersökts i den här avhandlingen har graden av homogenitet i grupperna relaterats till elevernas socioekonomiska status, SES, och till elevernas kompetenser i undervisningsspråket. Det finns problem förknippade med denna kategorisering av grupsammansättningarna vilka har behövt beaktas i avhandlingen. Exempelvis finns ett överlapp mellan kategorierna eftersom elever med förväntade brister i undervisningsspråket mer ofta än andra kommer från familjer med låg SES. Dessutom finns det svårigheter förknippade med att mäta SES-nivån eftersom innebörd och struktur av de indikatorer som används kan skilja mellan elever med migrationsbakgrund och svensk bakgrund. Bland olika dimensioner av SES är det familjernas kulturella kapital som visat sig ha störst samband med elevens skolresultat (Yang & Gustafsson, 2004) och Elmeroth (2006) problematiserar hur man mäter denna dimension i grupper med elever som har olika migrationsbakgrund. Föräldrarnas utbildningsnivå är en indikator som ofta används för att mäta det kulturella kapitalet och Elmeroth visar att det finns stora skillnader i utbildningsnivåer mellan familjer med olika migrationsbakgrund. Dessa skillnader kan till stor del spegla olika länders utbildningsnivåer och är därför inte helt individrelaterade, vilket

innebär att betydelsen av en viss utbildningsnivå kan variera mellan familjerna. Dessutom kan det vara svårt att tolka innebörden i en viss utbildningsnivå för personer som utvandrat till ett annat land. Betydelsen av utbildningsnivån relateras till den position familjen får i det nya landet, vilken exempelvis kan vara förknippad med hur de blir accepterade i samhället och kommer in på arbetsmarknaden. Ett annat exempel på en ofta använd indikator på SES är det antalet böcker som finns i elevens hem. Elmeroth visar att det finns en mycket stor skillnad mellan familjer med svensk bakgrund och familjer med migrationsbakgrund och diskuterar att denna skillnad exempelvis kan bero på omständigheter vid utvandringen eller på den ekonomiska situationen i det nya landet. Att mäta SES utan att beakta dessa och liknande omständigheter orsakade av migrationen skulle kunna leda till att man feltolkar effekterna av olika grupsammansättningar. Därför är sådana hänsyn tagna i den här avhandlingen.

Pedagogisk segregation

Utöver de möjliga förklaringsvariabler som tidigare diskuterats kan ytterligare en aspekt av undervisning påverka resultaten, det gäller sambandet mellan grupsammansättning och undervisningens utformning. Detta samband kan definieras som undervisningens likvärdighet. Får alla elever oberoende av undervisningsgruppens sammansättning sådan undervisning som stödjer deras kunskapsbildning? Denna fråga diskuteras i detta avsnitt och inledningsvis problematiseras innebörden i likvärdig undervisning.

Enligt Wallin (2002) bör skolverksamhetens likvärdighet diskuteras med utgångspunkt i individens behov och livsprojekt, inte i perspektivet att alla elever ges lika möjligheter i ett likformigt skolsystem. I begreppet likvärdig utbildning ligger att det skapas goda förutsättningar för elevernas lärande genom att exempelvis undervisningens innehåll, arbetsformer och metodik varieras efter elevernas individuella behov, konstaterar Wallin. Denna idé om likvärdig undervisning blev framträdande under 1980-talet då en jämlikhetstanke baserad på lika undervisning till alla övergavs till förmån för idén om likvärdig undervisning, enligt Wallin. På samma sätt som lika undervisning till alla syftade till jämlikhet så syftar även den likvärdiga undervisningen till en jämlik skola där inte kön, klass eller etnicitet har betydelse för elevernas skolframgångar. Nussbaums (2000) moralfilosofiska teori om rättvisa, ”The capabilities approach”, bygger också på att samhället har ansvar för att alla människor skall kunna skaffa sig de förmågor som är nödvändiga för ett gott liv. Detta syfte framgår också av skollagens formulering att ”alla huvudmän skall erbjuda utbildning av sådan kvalitet att barn och ungdomar får likvärdiga förutsättningar för att nå utbildningens mål. Alla barn och

elever ska också få möjlighet att nå så långt som möjligt utifrån sina egna förutsättningar” (SOU 2010:95, 2010). Skolreformer genom åren har emellertid inte lett till utjämning av klasskillnader (Svensson, 2001). Hur en likvärdig utbildning skall uppnås och vad som hindrar målsättningen med en jämlik skola måste alltså problematiseras. Att anpassa undervisning till elevers individuella behov kan utformas på många olika sätt och med varierande framgång.

Oakes (1998) visar hur likvärdig undervisning kan åstadkommas genom att den anpassas till undervisningsgruppernas sammansättning. Hon visar även komplexiteten och svårigheterna med sådan anpassning. När Oakes studerat olika grupsammansättnings betydelse för elevers lärande har hon funnit att heterogena grupsammansättningar kan ha mer positivt inflytande än homogena. Emellertid visar Oakes att de heterogena gruppernas framgångar bygger på att flera villkor är uppfyllda, exempelvis att det avsätts tid och resurser för utveckling av undervisningsstrategier som engagerar alla elever i de heterogena klassrummen. Genom att visa hur traditioner och fördomar kan påverka lärares förväntningar på elevers möjligheter och intressen så problematiserar Oakes också komplexiteten i att anpassa undervisning till grupsammansättnings förutsättningar. Man kan säga att Oakes fäster uppmärksamhet på att undervisning inte bara skall vara likvärdig i betydelsen ”lika för alla”, utan också att den behöver anpassas till olika gruppers förutsättningar. Dessutom visar hon på riskerna med att gruppernas sammansättning kan ha negativ påverkan på undervisningens utformning.

Colemanrapporten (J S Coleman, et al., 1966) visar att faktorer som beskriver elevers familjebakgrund har påverkan på skolframgångarna. I olika effektstudier som följt efter denna rapport har man emellertid velat styra bort från dessa resultat och i stället visa att undervisning kan göra skillnad (Dumay & Dupriez, 2007). Den kontextuella effekten av grupsammansättningen på elevprestationerna har följaktligen inte undersökts mycket enligt Dumay och Dupriez. Sammansättningseffekter har i effektstudierna i stället betraktats som externa problem vilka måste kontrolleras för då man försökt visa vilka skol- och undervisningsfaktorer som legat till grund för skolframgång. Dock presenterar Dumay och Dupriez (2007) viss tidigare forskning som belyser undervisningens likvärdighet i relation till gruppens sammansättning. Thrupp (1999) studerade i fyra skolor hur elevsammansättningen påverkar elevernas prestationer. Hypotesen var att sammansättningseffekterna inte enbart var direkta utan även medierades genom exempelvis undervisningens utformning. Denna hypotes bekräftades i studien då skolor med hög SES-nivå uppvisade fler aktiviteter knutna till läroplanen samt mer ämnesinriktad verksamhet, engagerade klasser, motiverade ele-

ver och utmanande undervisning och dessutom fler kvalificerade och motiverade lärare än vad skolor med låg SES-nivå kunde uppvisa.

Dumay och Dupriez konstaterar att flera kvalitativt inriktade studier visar ett samband mellan undervisningsprocesser och hur undervisningsgrupper, eller skolor, är sammansatta. Kvantitativt inriktade studier har som tidigare konstaterats ofta undvikit problematiken med likvärdig undervisning, men några undersökningar finns ändå att referera. Garrison (2004) visade brist på likvärdighet i amerikanska allmänna skolor där undervisningen var mer stödjande för elevernas lärande i klasser som hade stor andel högpresterande elever än i andra klasser. Weinert, Schrader, och Helmke (1989) visade ett samband mellan elevers förkunskaper och undervisningens utformning. Opendakker och Van Damme (2007) fann i en studie att det inte råder likvärdiga förutsättningar mellan olika skolor. Elever i skolor med gynnsamma grupsammansättningar presterar bättre än elever i andra skolor. Dumay och Dupriez (2007), som studerat undervisning i Belgien, England, Nederländerna och USA, visade att både ledarskap och pedagogiska processer hör ihop med grupsammansättningen och vidare att detta samband förklarar en del av den variation som finns mellan klassers resultat.

Sammantaget visar tidigare forskning att likvärdigheten i undervisningen kan påverkas negativt av undervisningsgruppernas sammansättning. Om så är fallet kan det kallas pedagogisk segregation. Undervisningsgrupper med stort behov av stöd för elevernas kunskapsutveckling erbjuds i så fall mindre stöd än andra grupper. Med utgångspunkt i dessa resultat och att matematikprestationerna försämrats i Sverige under samma period som grupsammansättningarna blivit allt mer homogena finns det därför anledning att undersöka likvärdigheten i den svenska matematikundervisningen.

Sammanfattning

Under de senaste 20 åren har skolsegregationen ökat bland annat som en konsekvens av boendesegregation och det fria skolvalet. Den nivågruppering av eleverna som skett inom skolor har förstärkt den segregande effekten. Dessutom har den internationella migrationen under motsvarande period lett till en allt större andel elever med utländsk bakgrund i den svenska skolan. Dessa förändringar har sammantaget resulterat i mer homogena undervisningsgrupper med avseende på socioekonomiska och språkliga faktorer. Matematikprestationerna har under samma period försämrats generellt i Sverige, och för elever med utländsk bakgrund har resultaten varit lägre än för andra grupper. Dessutom har elevers socioekonomiska bakgrund i allt högre grad kommit att påverka presta-

tionerna. Under perioden har också ett allt mer individuellt elevansvar för läran-
det blivit vanligt i matematikundervisningen.

Tidigare forskningsresultat visar att interaktion och andra sociala aktiviteter har betydelse för elevers kunskapsutveckling i matematik. Resultaten belyser också betydelsen av att elever själva får konstruera sitt kunnande och att lärares aktiva vägledning av eleverna är viktig. För elever med bristande kompetens i undervisningsspråket är denna vägledning av särskilt stor betydelse, liksom möjligheterna att kunna samtala och få stöd för sin språkutveckling. Att erbjuda en undervisningsmiljö präglad av dessa förutsättningar är därför ett sätt att ta ansvar för elevers kunskapsutveckling. Tidigare forskningsresultat visar även att grupsammansättningar påverkar resultaten genom exempelvis kamrateffekter samt att grupsammansättningar kan vara relaterade till undervisningens utformning.

Dessa bakgrundsbeskrivningar och empiriska forskningsresultat har tillsammans med teoretiska utgångspunkter legat till grund för antagandet att ett undervisningsansvar för olika dimensioner av matematikundervisningen påverkar elevernas kunskapsbildning. För elever med svagt utvecklade kunskaper i undervisningsspråket antas undervisningsansvaret ha särskilt stor betydelse eftersom eleverna skall utveckla både matematiska och språkliga kompetenser. Även individuella bakgrundsfaktorer som familjestatus och språkkompetens antas ha en direkt påverkan på prestationsnivåerna. Det antas dessutom finnas ett samband mellan undervisningsgruppernas sammansättning, relaterat till de individuella förklaringsfaktorerna, och hur undervisningsansvaret gestaltas i undervisningen. I den här studien är undervisningsansvaret representerat av tre olika dimensioner. Den första dimensionen, *lärarakтивitet*, beskriver lärarens ansvar för att aktivt och öppet stötta eleverna i deras utveckling av mer komplexa strukturer av kunnande i matematik. Detta kan de exempelvis göra genom att lyfta fram och förklara det matematiska innehållet, fråga och samtala med eleverna eller på annat sätt få återkoppling för att ta reda på deras förkunskaper och tidigare erfarenheter, samt genom att organisera undervisningen så att det skapas förutsättningar för interaktion och olika sociala aktiviteter. Den andra dimensionen, *elevaktivitet*, beskriver lärarens ansvar för att lämna över ansvar till eleverna själva för deras egen konstruktion av sin kunskap. Detta arbete kan eleverna antingen utföra individuellt eller i social interaktion tillsammans med kamrater. Till denna dimension av ansvar ingår förberedelser av uppgifter och problem samt stöttning av eleverna i deras självständiga arbete. Slutligen beskriver den tredje dimensionen, *matematikinnehåll*, lärarens ansvar för att lyfta fram det matematiska innehållet som objekt för undervisningen. Teoretiska utgångspunkter för de

nämnda antagandena är att lärandet betraktas som en process med interaktion och språk som viktiga faktorer för elevernas möjligheter att nå mer komplexa strukturer av kunskande (Vygotskij, 1926/1997, 1978, 1997), att elevens aktivitet och egen konstruktion av kunskap är en förutsättning för kunskapsutvecklingen (Brousseau, 1997; Vygotskij, 1978) samt även att lärarens aktiva stöttning av eleverna är en viktig förutsättning (Brousseau, 1997; Bruner, 1960, 1985; Cummins, 1984; Gibbons, 2002; Vygotskij, 1926/1997, 1986, 1997).

I traditionella modeller för att beskriva matematikundervisning belyses inte dessa olika dimensioner av ansvar samtidigt. En sådan undervisningsmodell har därför utvecklats i den här studien. Med beaktande av att även individuella bakgrundsfaktorer påverkar elevernas prestationer har modellen sedan använts för att undersöka undervisningens betydelse för elevernas kunskapsbildning i matematik. Mot bakgrund av samhällsförändringar och tidigare forskningsresultat har det även varit motiverat att använda denna modell för att undersöka matematikundervisningens likvärdighet.

STUDIENS SYFTE, FORSKNINGSFRÅGOR OCH DESIGN

Syfte

Avhandlingens syfte är att belysa innebörden i ansvaret för elevers matematiklärande samt detta ansvars betydelse för elevernas kunskapsbildning i matematik. Dessutom är syftet att belysa om undervisningsgruppers sammansättning med avseende på elevers individuella bakgrundsfaktorer är relaterat till hur ansvaret för matematiklärandet kommer till uttryck i undervisningen.

Forskningsfrågor

Följande frågor har legat till grund för undersökningarna i de tre delstudierna:

1. Vilka dimensioner av ansvar för elevers lärande kan i det flerspråkiga klassrummet antas ha inflytande över elevernas möjligheter till kunskapsbildning i matematik?
2. Vilka effekter har dessa olika dimensioner av ansvar på matematikprestationerna?
3. Har undervisningsgruppers sammansättning, relaterat till elevernas sociala och språkliga bakgrunder, betydelse för prestationsnivåerna i matematik?
4. Hur ser sambandet ut mellan gruppammansättning och ansvar för elevers kunskapsbildning i matematik?
5. Hur påverkas validiteten för kontrollvariabeln socioekonomisk status då denna mäts i undervisningsgrupper med elever med olika migrationsbakgrund?

Design

I avhandlingen ingår tre artiklar: (I) ”Instructional responsibility in mathematics education: Modelling classroom teaching using Swedish data”; (II) ”Measurement invariance of socioeconomic status across migrational background” och (III) “The meaning of mathematics teaching in multilingual classrooms: Analysing effects of responsibility for learning on achievement using Swedish data”.

Den första delstudien som presenteras i artikel I omfattar den första forskningsfrågan ovan. I studien problematiseras ansvaret för elevers kunskapsbildning och detta ansvar relateras till olika traditionella sätt att karaktärisera undervisning. I studien utvecklas en alternativ mätmodell för undervisningsansvar vilken också valideras empiriskt mot data i TIMMS 2003, matematik årskurs 8.

Den andra delstudien som presenteras i artikel II behandlar den femte forskningsfrågan ovan. I studien undersöks hur mätinvariansen i en mätmodell för socioekonomisk status, SES, påverkas då SES mäts i grupper med elever med olika migrationsbakgrunder. Studien ger underlag för val av mätmodell i sådana analyser där socioekonomisk status exempelvis används som kontrollvariabel.

De återstående forskningsfrågorna undersöks i den tredje delstudien vilken presenteras i artikel III. De mätmodeller som är utvecklade i de två första delstudierna används i den tredje där effekter av undervisning och individuella bakgrundsfaktorer på elevernas matematikprestationer undersöks.

METOD OCH DATA

I detta avsnitt förs inledningsvis en diskussion om metodvalet för avhandlingens tre delstudier. Diskussionen behandlar metodens möjligheter och begränsningar vad gäller studieobjekt och slutsatser. Därefter presenteras den data som är använd för de empiriska studierna. Avsnittet avslutas med en översiktlig och kortfattad beskrivning av använda metoder med syfte att ge läsaren vägledning inför läsningen av de tre artiklarna.

Metodval

Metodvalet i den här avhandlingen har styrts av undersökningens syfte och de formulerade forskningsfrågorna. Då syftet har varit att belysa generella mönster av samband mellan matematikundervisningens utformning i flerspråkiga klassrum och de resultat eleverna presterat, har jag behövt använda metoder som både kan väga in flera analysnivåer samt de komplexa relationer som finns mellan å ena sidan undervisningen och elevernas prestationer och å andra sidan olika bakgrundsfaktorer som är relaterade till både undervisningen och resultaten.

Metodvalet påverkar i sin tur vilken nivå som kan beforskas, individ, grupp- eller organisationsnivå. Syftet med metodvalet i den här studien har varit att kunna undersöka den nivå som beskriver undervisningen, det vill säga grupp-nivån, samtidigt som det också har varit nödvändigt att ta hänsyn till den påverkan på undervisningen som har sitt ursprung i elevnivån. För att analysera dessa komplexa relationer med syftet att påvisa effekter av undervisningsansvar, har jag behövt ett datamaterial som innehåller observationer på de båda nivåerna samt metoder som kan hantera undervisningens relationer till dessa nivåer. Utifrån dessa krav har jag som tidigare beskrivits valt att göra en sekundäranalys av data från undersökningen TIMSS 2003, årskurs 8, då denna förutom elevernas testresultat också erbjuder både lärar- och elevbeskrivningar. Sekundäranalysen är genomförd som en latent variabelanalys med flernivåmodellering inom det som betraktas som komplex relationsanalys (Cohen et al., 2007). I forskning som rör utbildningsfrågor är det ofta av intresse att studera relationer mellan olika

förklarings- och bakgrundsvariabler samt elevernas prestationer. Då dessa variabler många gånger inte är direkt observerbara och därför svåra att mäta, är latent variabelanalys en möjlig metod att använda. Om exempelvis undervisningens utformning antas kunna förklara en del av variationen i prestationsresultaten kan man använda flera olika observerade variabler för att mäta denna förklaringsvariabel. Den teoretiskt konstruerade faktorn, den latent, bestämmer i sin tur vilka observerade variabler som kan användas som indikatorer. Även om innebörden i en latent faktor betraktas som stabil kan valet av indikatorer variera över tid och sammanhang (Loehlin, 2004). Ytterligare en fördel med latent variabelanalys inom utbildningsforskning är metodens möjligheter att fånga och återge olika dimensioner av ett fenomen.

Den utveckling som skett inom detta metodmässiga och teoretiska ramverk de senaste decennierna har också bidragit till att kausala samband kan studeras med större säkerhet och precision än vad som var möjligt tidigare. Detta har blivit möjligt bland annat för att den analytiska tekniken har utvecklats mycket, men även för att kvaliteten på insamlad data i de internationella studierna förbättrats, bland annat på grund av de nya testteorierna som används, de så kallade ”item response teorierna, IRT”. Genom den nya tekniken har man kunnat utveckla metoder som både tar hänsyn till och drar nytta av data som har en ”nästlad” struktur, vilket innebär att varje observation inte är oberoende av övriga observationer utan att eleverna är grupperade i klasser och att klasserna i sin tur är grupperade i skolor och så vidare. Ett exempel på en analytisk teknik som utvecklats under senare år är den metod som använts i den här studien, strukturell ekvationsmodellering, genom vilken det har blivit möjligt att göra latent variabelanalys med både kvalitativt olika slags data samt att konstruera analysmodeller med data som är insamlad på två olika nivåer (Muthén, 1994).

Förutom att effekter av vissa faktorer tenderar att bli underskattade i traditionella undersökningar som genomförs på en disaggregerad nivå, så tenderar dessutom dessa ansatser att bortse från flernivåkaraktären hos utbildningsdata (Gustafsson, 2003), och därigenom går undersökningarna miste om viktig information som finns i data. När man tidigare analyserade gruppnivån, innan flernivåmetoderna var utvecklade, aggregerades oftast elevdata till gruppnivådata, vilket både riskerade att förändra variabelernas betydelse och att skapa bias i de skattade parametrarna. En mer kraftfull forskningsansats är därför flernivå strukturell ekvationsmodellering vilken drar nytta av datas flernivåkaraktär (Hox, 2002). I föreliggande studie är den analytiska nivån gruppnivån, men inte endast lärardata indikerar matematikundervisningen, utan även aggregerad elevdata. Att variationer mellan elever inom klasser däremot inte så tydligt är relaterade till

undervisning beror bland annat på den omvända kausaliteten som är ett allvarligt hot mot valida kausala tolkningar av resultaten (Gustafsson, 2010a). Genom att analysera gruppnivån (dvs. variation mellan klasser) har det i denna studie också varit möjligt att motverka hot från den omvända kausaliteten, eftersom de hot som är rådande på elevnivån oftast inte är det på gruppnivån.

Trots de metodmässiga framstegen så återstår det emellertid flera fallgropar då man gör kausala tolkningar av analysresultat som är baserade på observationsdata och inte på experimentellt grundad data. Det hot som nämndes ovan mot tolkningar på elevnivån, vilket kommer från omvänd kausalitet och kallas endogenitetsproblem, kan inte heller uteslutas på gruppnivån. Problemet kan beskrivas som en påverkan från den beroende variabeln på den variabel som betraktas som den oberoende variabeln. Om man exempelvis undersöker effekter av att ge elever hemläxor är det lätt att inse att det på elevnivå inte sällan handlar om att de elever som har bristande kunskaper i ett ämne också är samma elever som oftast får hemläxor för att kompensera sina brister. Men även på gruppnivån kan det vara så att de klasser som får läxor oftare befinner sig på lägre prestationsnivåer än klasser som inte får läxor. Att då dra slutsatsen att läxor orsakar sämre prestationsresultat är givetvis fel.

Ett annat exempel på feltolkningar när man analyserar observationsdata är att man drar slutsatsen att det finns ett samband mellan två variabler medan det i själva verket inte är dessa variabler som är relaterade till varandra, utan det finns en tredje variabel som påverkar båda de andra variablerna. Denna tredje variabel är emellertid inte inkluderad i modellen. Exempelvis kan ett analysresultat påvisa ett samband mellan stora klasser och låg datoranvändning vilket i sin tur tolkas som ett orsakssamband. I själva verket kan både klasstorlek och tillgången till datorer vara orsakad av skolans ekonomiska resurser. Med god tillgång till datorer kanske även lärare i stora klasser är benägna att låta eleverna arbeta med datorer, men detta framkommer inte i analysen.

Ytterligare ett exempel på en situation som inom utbildningsforskningen kan utgöra ett hot mot kausala tolkningar är då grupperingar av olika slag inte är slumpmässigt hopsatta utan styrda av elevernas egna val. Om man exempelvis har studerat effekter av elevernas deltagande i extraundervisning på sommarloven och det visat sig ge mycket positiva resultat kan det vara fel att dra slutsatser om orsakssamband eftersom de elever som valt att gå sommarskolan också i större utsträckning än andra elever visar sig ha stort stöd från sina familjer, eller vara motiverade och beredda att arbeta hårt. Till sist kan nämnas att även mätfel i de observerade variablerna utgör ett hot mot kausala tolkningar. Sådana mätfel orsakar oftast att man undgår att upptäcka faktiska kausala relationer.

Den design som är vald för den här studien ingår i kategorin tvärsnittsstudier. Det innebär att man studerar ett fenomen vid en tidpunkt. Man har då inte möjlighet att se trender och förändringar vilket försvårar möjligheten att studera kausala samband. Samband mellan olika faktorer kan visserligen belysas i en tvärsnittsstudie men det finns fallor av sådana slag som diskuterats ovan. Ett sätt att motverka felaktiga slutsatser om kausala samband är att i analysmodellerna inte endast undersöker effekter av de oberoende variablerna utan även kontrollera för effekter av andra variabler som påverkar både de oberoende och de beroende variablerna (Pedhazur & Pedhazur Schmelkin, 1991), så kallade kontrollmodeller. Detta är möjligt att göra i flernivå strukturell ekvationsmodellering och har utnyttjats i denna avhandling. Denna ansats bygger dock på att kontrollvariablerna både är valida och reliabla samt att man vid tolkningen av resultaten beaktar att det kan finnas ytterligare variabler, ej inkluderade i modellen, som har egenskapen att påverka både de oberoende och beroende variablerna.

En annan ansats som stödjer möjligheten att göra kausala tolkningar är en longitudinell design, en trendanalys där man undersöker förändringar över tid, i vilken det också är möjligt att kontrollera för andra påverkansfaktorer (Gustafsson, 2010b). I den här studien har emellertid inte detta varit möjligt eftersom data inte erbjuder upprepade mätningar av de för studien relevanta variablerna. I trendstudier är det inte individerna som står i centrum utan faktorerna. Vid varje undersökningstillfälle görs nya sampel. Det finns dock en risk att dessa förändringar över tid inte speglar en trend utan snarare beror på att det är olika respondenter vid varje undersökningstillfälle och väsentliga villkor kan ha förändrats. Genom att gå ett steg vidare och aggregera tvärsnittsdata till landnivå skulle det kunna vara möjligt att motverka dessa hot mot de kausala slutsatserna (Gustafsson, 2007).

Genom att välja metoden flernivå strukturell ekvationsmodellering har det i studien varit möjligt att utnyttja informationen i data på ett effektivt sätt och därigenom påvisa effekter som med mer traditionella analysmetoder annars skulle bli underskattade. Genom denna metod har också möjligheterna att motverka hot mot kausala tolkningar stärkts vilket ökar säkerheten i studien. En begränsning i studien utgörs dock av de inskränkningar som datamaterialet innebär. Trots ett högkvalitativt datamaterial saknas information som på ett än mer fullödigt sätt skulle ha kunnat ge en rik bild av den svenska matematikundervisningen och andra väsentliga förklaringsfaktorer för elevernas möjligheter att utveckla sitt matematiska kunnande.

Data

I detta avsnitt presenteras det teoretiska ramverk som ligger till grund för TIMSS 2003 studien. I avsnittet presenteras också de variabler som använts i de tre delstudierna för att indikera olika dimensioner av matematikundervisning, elevernas individuella bakgrundsfaktorer samt testresultaten. Avsnittet avslutas med en diskussion om hur bortfall av data har hanterats.

TIMSS 2003, teoretiskt ramverk

Data för de empiriska undersökningarna i den här avhandlingen är hämtat från TIMSS 2003, Trends in International Mathematics and Science Study, som genomförs av IEA, the International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Det svenska urvalet som har fokus på matematik för elever i årskurs 8 omfattade 4 256 elever från 274 klasser i 160 skolor. I den delmängd som användes i analyserna ingick de klasser som i årskurs åtta endast undervisades av en matematiklärare och i vilka både elever och lärare svarat på enkäterna (3237 elever i 217 klasser).

TIMSS-undersökningarna mäter förutom elevprestationer också olika kontextuella faktorer. IEA bildades 1958 under ledning av UNESCO och under 1960-talet genomfördes de första storskaliga studierna. De syftade i första hand till att ge underlag för forskning, men har sedan dess alltmer kommit att verka som underlag för olika beslutsfattare inom utbildningssystemet. Eftersom många länder har gått mot ett mera decentraliserat och målstyrt skolsystem där staten inte längre styr hur undervisningen skall bedrivas utan istället sätter upp mål för verksamheten, så har intresset för att mäta utfallet av utbildningen växt (Olsen, 2005). De storskaliga studierna har därför behållit en stark position i samhället, men nu mest som utvärderingsinstrument. TIMSS-studierna (som genomförts 1995, 1999, 2003 och 2007) mäter såväl elevernas kognitiva kunskaper som olika bakgrundsvariabler och är till skillnad från PISA-undersökningarna, för vilka OECD ansvarar, relaterade till skolans olika styrdokument. Testen är utformade så att alla elever, oberoende av vilket land de bor i, skall vara bekanta med både form och innehåll. PISA-studierna är mer normativa i den meningen att de relateras till vilka färdigheter elever bör ha med sig från skolundervisningen i matematik för att klara ett yrkes- och vardagsliv i ett modernt samhälle och de speglar även medborgarnas beredskap att lära nytt i takt med att samhället utvecklas. Eftersom TIMSS-data till skillnad från PISA möjliggör analyser på både elev- och gruppnivå kommer undervisningen mera i centrum i TIMSS-materialet. TIMSS-data svarar alltså bäst mot de forskningsfrågor som är formulerade i den

här avhandlingen där undervisningens genomförande är i centrum och har därför fått utgöra underlag för de empiriska undersökningarna.

Det finns både för- och nackdelar med att använda redan insamlad data. Som Gustafsson (2008) skriver är TIMSS-materialet av hög kvalitet och möjliggör generaliseringar på systemnivå. Det finns data kring en stor mängd parametrar att utnyttja och det finns även en nationell prägel på studien. Begränsningarna kan exempelvis vara att man som forskare inte är bekant med data, att det är ett mycket komplext material och att det kan vara brist på nyckelvariabler (Bryman, 2004). Till viss del har brist på nyckelvariabler utgjort en begränsning i de olika delstudierna i denna avhandling och detta diskuteras senare.

Variabler

Datan i TIMSS omfattar beskrivningar från olika nivåer av matematikundervisningen, skol- och klasstrukturer, lärar- och elevbeskrivningar samt testresultat. För att indikera olika dimensioner av matematikundervisning i delstudie I och III har variabler från både lärar- och elevbeskrivningarna, samt testresultat använts. Elevnivån i undervisningen har tecknats av endast elevvariabler, så kallade globala variabler, och gruppnivån av både lärarvariabler och aggregerade elevvariabler, så kallade analytiska variabler. För att i delstudie II indikera den individuella bakgrundsvariabeln socioekonomisk status har endast variabler från elevnivån använts. Denna bakgrundsvariabel har även använts i delstudie II och III. Slutligen, för att gruppera eleverna efter deras språkliga kompetenser, har jag använt en dummyvariabel som indikerar hur lång tid eleverna har bott i Sverige och denna variabel har därefter använts i alla tre delstudierna.

Hur väl dessa manifesta variabler har förmått att indikera egenskaper som faktiskt skiljer sig mellan klasserna, och inte endast generella egenskaper som återfinns i de flesta matematikklasserna i grundskolan, anges av ett mått som kallas variablernas intraklasskorrelation. Detta mått som visar hur mycket av variationen i en variabel som förklaras av skillnaderna mellan grupper visar också om det är nödvändigt att göra en flernivåanalys eller ej. I den här studien har intraklasskorrelationerna för de aktuella variablerna varit höga och därför indikerat behovet att göra en flernivåanalys. Se delstudie I.

Matematikundervisning

I delstudie I och II användes sådana manifesta variabler som indikerar olika dimensioner av ansvarstagande i matematikundervisningen. Den dimension av undervisningen som utmärks av att lärare aktivt stöttar eleverna i deras lärande och möjliggör interaktion och andra sociala aktiviteter indikerades genom tre manifesta variabler från elevenkäten och fyra från lärarenkäten. Variablerna från elev-

enkäten beskriver hur eleverna uppfattar den matematikundervisning de möter i sin undervisningsgrupp medan variabelerna från lärarenkäten beskriver hur lärarna uppfattar att de genomför undervisningen. Alltså, från elev- och lärarenkäten i TIMMS-materialet antogs att sju observerade variabler hade kapaciteten att återge denna dimension av ansvar i matematikundervisningen. Se tabell 1 i delstudie I.

Den dimension av undervisningen som utmärker elevernas eget ansvar för att konstruera sin kunskap indikerades genom fyra manifesta variabler från elevenkäten och tre från lärarenkäten. Variablerna från elevenkäten beskriver hur eleverna uppfattar att de själva arbetar aktivt med matematiken medan variabelerna från lärarenkäten beskriver hur lärarna uppfattar att de stimulerar eleverna till denna aktivitet. Alltså antogs det att sju observerade variabler hade kapaciteten att återge denna dimension av ansvar i matematikundervisningen. Se tabell 1 i delstudie I.

Slutligen, för den tredje dimensionen i undervisningsmodellen, den som karakteriserar att matematikinnehållet lyfts fram som objekt i undervisningen, användes tre variabler för att indikera denna dimension av ansvar. Se tabell 1 i delstudie I.

EleVBakgrund

I delstudie II utvecklades en modell för att beskriva och analysera den bakgrundsvariabel som återger familjernas socioekonomiska status och som antas ha påverkan på elevernas matematikresultat. När effekterna av de olika dimensionerna av ansvar i matematikundervisningen senare undersöktes användes denna bakgrundsvariabel bland annat för att kontrollera för det inflytande som familjebakgrunden hade på dessa effekter. Den användes också för att undersöka sambandet mellan grupsammansättningar och matematikundervisningens utformning. Den socioekonomiska statusen indikerades i modellen genom fyra manifesta variabler: två som beskriver föräldrarnas utbildningsnivå, en som beskriver elevernas studieambitioner och slutligen en som beskriver hur många böcker det finns i elevernas hem. Se tabell 2 i delstudie II.

En annan aspekt av elevens individuella bakgrund som både på elev- och grupp-nivå antogs påverka möjligheterna att prestera matematik var elevens språkkompetens. Eftersom TIMSS-data inte erbjuder variabler som beskriver denna kompetens har bakgrundsvariabeln i stället kommit att indikeras av en manifest variabel som endast indirekt antas indikera elevens språkliga kompetens i undervisningsspråket. Med hjälp av manifesta variabler som beskriver elevens utländska eller svenska bakgrund respektive födelseland, Sverige eller utomlands, skapades dummyvariabler med vars hjälp eleverna slutligen grupperades i två

grupper: de med utländsk bakgrund som var födda utomlands och de med utländsk eller svensk bakgrund som var födda i Sverige.

Matematiktest

I TIMSS 2003 användes en pool av 388 testfrågor varav 237 var av flervalstyp där eleven skulle välja ett av fyra eller fem presenterade svarsalternativ och 151 var sådana frågor där eleven själv utformade ett svar. En del av dessa egenformulerade svar fordrade endast ett ord eller ett beräknat värde medan andra krävde en utförligare redovisning som indikerar ett resonemang och en eventuell slutsats. Varje uppgift var klassificerad utifrån innehåll och kognitiv kategori. Innehållskategorierna är aritmetik, algebra, mätningar, geometri och statistik och de kognitiva kategorierna är kunna, tillämpa och resonera (Mullis, Martin, & Foy, 2005).

Förutom att ett standardiserat generellt mått på resultaten i matematiktestet har använts i alla tre delstudierna har också kategoriseringen av resultaten i de tre kognitiva domänerna använts i den tredje delstudien. Antagandet att det finns ett samband mellan betydelsen av hur ansvaret för elevernas matematiklärande kommer till uttryck i undervisningen och elevernas språkliga kompetens testades i den tredje delstudien genom att undersöka sambandet mellan undervisning och en språklig dimension av testuppgifterna. För att undersöka detta hade testuppgifterna behövt kategoriseras efter en språklig dimension, men detta har inte varit möjligt inom ramen för de valda metoderna och övriga förutsättningar för den här studiens genomförande. I stället antogs att det parallellt med den kognitiva dimensionen i de tre domänerna också finns en språklig dimension. Genom att visa hur sambandet mellan undervisningens utformning och dessa språkliga dimensioner i testuppgifterna ser ut har det varit möjligt att belysa sambandet mellan undervisningens utformning och elevernas språkliga kompetenser.

Den kognitiva dimensionen i domänen ”kunna” kännetecknas av de bas-kunskaper som eleven behöver, exempelvis komma ihåg, känna igen, kunna beräkna, ta fram information samt mäta och ordna. I en del av dessa uppgifter förekommer ord och begrepp vilka sätter in uppgiften i ett sammanhang, men oftast förekommer ingen text [Exempel: *Vad blir $1-5 \cdot (-2)$?* (M032612)]. Detta innebär att domänen ”kunna” kännetecknas av låg språklig nivå vilket i sin tur innebär att förekomsten av ord och begrepp relaterade till såväl vardags- som matematikkontexter är sparsamt förekommande.

Den kognitiva dimensionen i domänen ”tillämpa” kännetecknas av elevens förmåga att tillämpa sina kunskaper på olika rutinproblem de löser och när de svarar på frågor. Denna förmåga uttrycks exempelvis genom hur eleverna väljer metod och matematisk representation. Dessa uppgifter som testar hur eleverna

använder sina matematiska kunskaper omfattar en större mängd ord och begrepp än uppgifterna i den tidigare domänen [Exempel: *Ett trädgårdsland har 14 rader. Varje rad har 20 plantor. Trädgårdsmästaren planterar sedan ytterligare 6 rader med 20 plantor i varje rad. Hur många plantor är det nu totalt?* (M032671)]. Detta innebär att domänen ”tillämpa” kännetecknas av en relativt hög språklig nivå vilket i sin tur innebär att ord och begrepp relaterade till såväl vardags- som matematik-kontexter förekommer och behöver kunna avkodas av eleverna. Den matematik-språkliga abstraktionsnivån däremot är inte påfallande hög.

Den kognitiva dimensionen i domänen ”resonera” går ett steg vidare från rutinproblemen genom att omfatta testuppgifter som också kräver att eleven analyserar, generaliserar, integrerar och troliggör sina lösningar [Exempel: *En dataklubb hade 40 medlemmar. Av medlemmarna var 60 % flickor. Senare gick 10 pojkar med i klubben. Hur många procent av medlemmarna är nu flickor? Visa hur du kom fram till svaret.* (M032233)]. Domänen ”resonera” är den domän som kännetecknas av den största mängden ord och begrepp relaterade till såväl vardags- som matematikkontexter, varför testuppgifter från denna domän kan antas ha en hög språklig nivå. Bland dessa uppgifter förekommer även texter med en högre matematikspråklig abstraktionsnivå än i de tidigare domänerna.

Hantering av bortfall

Det finns två grundläggande problem med bortfall. Det första är svag extern validitet vilket innebär att ett resultat som bygger på en delmängd av observationerna i en undersökning inte motsvarar det resultat som hade nåtts om 100 % av observationerna ingått i analysen. Det andra problemet med bortfall är låg statistisk kraft, vilket innebär att även om det finns en icke försumbar effekt i populationen så är urvalet av respondenter för litet för att ge ett signifikant resultat. Men statistisk kraft är snarare en fråga om urvalsstorlek än om bortfall (Newman, 2009). I all samhällsvetenskaplig forskning är det vanligt att det saknas information för vissa variabler. Detta bortfall kan vara slumpmässigt eller systematiskt. Om ett slumpmässigt bortfall inte är relaterat till de observerade variablerna över huvud taget benämns det MCAR (missing completely at random). Om det däremot finns en sannolikhetsfördelning för det slumpmässiga utfallet kallas det MAR (missing at random). Det systematiska bortfallet benämns MNAR (missing not at random).

Då man använder latent variabler i analysmodeller, vilket är icke observerbara variabler, är Maximum Likelihood (ML) en beräkningsmetod som har en procedur för att hantera bortfall av observationer vid estimeringen av de olika parametrarna i modellen (Schafer & Graham, 2002). I stället för att då utesluta ej kompletta observationer, eller komplettera dem med andra värden, så finns det

en skattningsprocedur i ML som utgår ifrån att bortfall är slumpmässiga MAR-variabler. Schafer och Graham konstaterar att ML-procedurens hantering av bortfall ger estimat som är bättre än då bortfall hanteras genom uteslutning eller komplettering. Om man utesluter observationer leder det förutom till försämrade statistisk kraft också till bias i de skattade parametrarna. Principen ”att använda all tillgänglig data för alla variabler från alla respondenter” är överlägsen de metoder som endast utnyttjar delar av den observerade datamängden (Newman, 2009, s. 13).

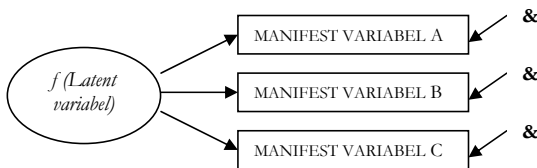
Genom att hantera bortfall på ett korrekt sätt erhåller man alltså högre precision i skattningarna av modellens olika parametrar och därigenom minskar risken att dra felaktiga slutsatser. Den statistiska kraften minskas emellertid av alla bortfall, oberoende av om de är slumpmässiga eller systematiska. Om bortfallet karaktäriseras av MNAR hävdar Newman (2009) att det finns få, om ens några, tekniker som fungerar bra. I den här studien finns dels partiella bortfall av både elev- eller lärarsvar vilka hanteras av ML-proceduren, men också ett bortfall som härrör från uteslutna observationer i de fall där det inte funnits lärarsvar kopplade till elevsvaren. Att avgöra om det senare bortfallet är systematiskt eller ej skulle kräva en noggrann analys av de uteblivna svaren. Egentligen krävs insamling och analys av data från de lärare som inte svarat på enkäten (Schafer & Graham, 2002), vilket emellertid inte har varit möjligt att göra. Att de uteblivna lärarsvaren skulle bero på att lärarna har en ”känslig” relation till det studerade objektet, undervisningen, vilket Newman lyfter fram som en tänkbar orsak till bortfall, är kanske inte lika troligt i den här studien som att exempelvis lärarnas arbetsvillkor kan påverka deras vilja att svara på alla enkätfrågorna. Detta talar för att det bortfall som härrör från de observationer som strukits på grund av uteblivna lärarsvar inte är att betrakta som helt slumpmässigt. Men ML-skattningar erbjuder under liknande omständigheter mer robusta skattningar än vid traditionell hantering av bortfall (Newman, 2009).

Konfirmatorisk faktoranalys och strukturell ekvationsmodellering

Konfirmatorisk faktoranalys, CFA (Confirmatory Factor Analysis), används för validering av en teoretiskt konstruerad faktormodell. I delstudierna i den här avhandlingen utgörs dessa faktorer av undervisningens utformning och familjernas socioekonomiska status. Man söker underliggande dimensioner av en faktor genom att använda flera observerade, manifesta, variabler för indikation av dessa dimensioner. Indikatorerna är interkorrelerade eftersom de är påverkade av samma underliggande struktur och relationen mellan dessa observerade variabler

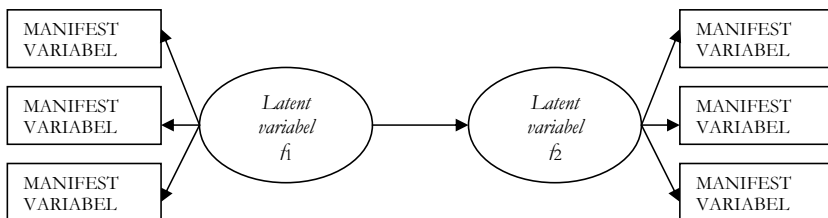
och den icke observerade variabeln uttrycks av faktorladdningar som visar vilken betydelse en indikator har för att beskriva den icke observerade faktorn (Brown, 2006; Hox, 2002). Dessa icke observerade faktorer kallas latenta variabler.

CFA-modeller är en slags sub-modeller av strukturell ekvationsmodellering, SEM, vilka behandlar mätmodeller för den latenta variabeln, det vill säga relationerna mellan mått på manifesta variabler och de latenta variablerna (Brown, 2006). Genom CFA validitetsbestäms den teoretiskt konstruerade faktorn, d.v.s. den latenta variabeln. CFA är en teoridriven metod vilket innebär att forskaren måste specificera alla delar av modellen. Den syftar till att bestämma antal och egenskaper av de latenta variabler som beskriver variationen och kovariansen bland en uppsättning manifesta variabler. I analysen kan också metodeffekterna mätas vilket innebär att man mäter hur stor den observerade kovarians är som inte beror på de latenta faktorerna utan på mätmetoden som sådan. Exempelvis kan elever i samma klass vara påverkade av någon gemensam miljöfaktor utanför den förklaringsfaktor som ingår i modellen. Se figur 3. I figuren finns förutom latenta och manifesta variabler också residualvarianser (&) markerade. Dessa anger att det finns oförklarad varians kvar i den manifesta variabeln som inte förklaras av den latenta variabeln. Det kan röra sig om såväl slumpmässig som systematisk påverkan. Analyserna i delstudie I och II bygger huvudsakligen på denna typ av analysmodell.



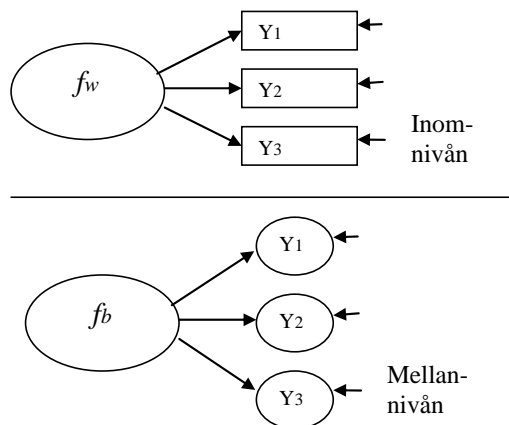
Figur 3. Mätmodell (CFA)

SEM-modeller kan betraktas som utvidgade CFA-modeller då dessa beaktar relationerna mellan olika latenta variabler. Se figur 4.



Figur 4. Strukturell modell (SEM)

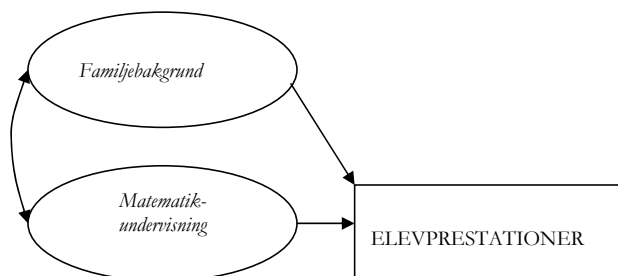
När man i utbildningsforskning exempelvis vill undersöka olika effekter av undervisning på elevernas kunskapsbildning är detta ett exempel på analyser som har hierarkisk struktur, där elever definierar den ena nivån av observationerna och klasser definierar den högre nivån. Men eftersom elevobservationerna är nästlade till klassrummen så har man en hierarkisk observationsstruktur där man inte kan anta att sannolikheten är lika stor för alla observationer att bli inkluderade i urvalet och inte heller att alla observationer är oberoende av varandra. Dessa data är synnerligen svår att analysera, men genom att använda tvånivå strukturell ekvationsmodellering (M-SEM, Multilevel Structural Equation Modeling) kan man erhålla bra ML-skattningar (maximum likelihood) av modellens parametrar (Hox, 2002; Muthén, 1994). Med hjälp av modelleringsprogrammet Mplus (Muthén & Muthén, 1998-2004) och modelleringsmiljön STREAMS (Gustafsson & Stahl, 2005) är det möjligt att hantera sådan komplex data. Denna teknik tillåter en specifikation av tvånivåmodeller med latenta variabler, där båda nivåerna kan prövas samtidigt. Likaså kan både kontinuerliga och kategorivariabler användas som indikatorer av de latenta variablerna och bortfallet hanteras i skattningsprocedurerna. I figur 5 visas hur faktormodeller byggs upp på både elev- och gruppnivån (inom- och mellannivån). I en flernivå strukturell modell relateras båda nivåerna för de latenta faktorerna till varandra.



Figur 5. Två-nivå faktormodell, elev(inom)- och grupp(mellan)-nivån

Om man exempelvis skulle vilja undersöka en undervisningsmodells effekter på elevernas prestationer i ett skolämne kan man anta att det finns fler bakomliggande orsaker till sambanden än själva undervisningen. Elevernas familjebakgrund är en sådan tänkbar påverkansfaktor. För att undersöka relationerna mellan undervisningsmodellen, elevernas familjebakgrund och elevprestationer så konstrueras en kontrollmodell. Se figur 6. I en flernivåmodell skall man dock

beakta att dessa latent faktorer är återgivna på både elev- och gruppnivå enligt figur 5 ovan. Analyserna i delstudie III bygger huvudsakligen på denna typ av analysmodell.



Figur 6. Kontrollmodell

För att avgöra hur väl teoretiskt konstruerade modeller överensstämmer med observerad data så genomförs anpassningstest. Som mått på anpassning används χ^2 och RMSEA (Root Mean Square Error of Approximation) vilka båda visar hur väl parametrarna i faktormodellen kan reproducera de observerade kovarianserna. För att visa att den estimerade kovariansmatrisen inte avviker på ett signifikant sätt från den observerade kovariansmatrisen i urvalet skall χ^2 vara ”icke-signifikant”. Detta senare mått används dock sällan i tillämpad forskning då det påverkas mycket av både små och stora urval, samt av det stränga kravet om överensstämmelse mellan den estimerade och den observerade kovariansmatrisen (Brown, 2006). Ett annat test för det absoluta villkoret, att den estimerade kovariansmatrisen överensstämmer med den observerade, är SRMR (Standardized Root Mean Square Residual), vilket redovisas i intervallet 0 till 1. Ju lägre värde desto bättre anpassning. RMSEA däremot är inte så känsligt för storleken på urvalet, men däremot för antalet modellparametrar. Måttet varierar mellan 0 och 1, ju mindre desto bättre. Om RMSEA är mindre än 0.08 har modellen en adekvat anpassning enligt Brown. Till sist kan måttet CFI (Comparative Fit Index) nämnas, vilket jämför den estimerade modellen med en modell där alla korrelationer mellan indikatorer är satta till 0. Även dessa testresultat återfinns i intervallet 0 till 1, där högre värden än 0.95 representerar god modellanpassning (Brown, 2006).

Det är inte bara modellanpassningsmått som avgör om en modell är bra. Den innehållsiga meningsfullheten och tolkningsbarheten är också viktigt. Modellen behöver analyseras utifrån teoretiska utgångspunkter. Det är också viktigt att få ett mått på den statistiska kraften i en analysmodell. Om kraften ökar så minskar risken att dra slutsatsen att det inte finns några signifikanta skillnader trots att det verkligen gör det.

Ett högt t-värde (>2) anger att det är liten sannolikhet att slumpen lett till ett visst parametervärde. Modellens prediktionskraft kan anges som den andel av variationen i den beroende variabeln som modellens faktorer lyckas förklara, R^2 . Effektstorlek är ytterligare ett mått på styrkan i den statistiska modellen. Detta mått beskriver skillnaden i påverkan från den oberoende variabeln på den beroende om det mellan två klasser skiljer 2 standardavvikelse mellan nivåerna på klassernas oberoende variabler. Ett sätt att mäta effektstorlek i tvånivå strukturell ekvationsmodellering är att ange ett mått jämförbart med Cohen's d vilket beräknas med formeln:

$$\text{DELTA} = 2 \cdot B \cdot \text{SDprediktor}/\text{Se}$$

där B är den icke standardiserade regressionskoefficienten i tvånivåmodellen, SDprediktor är den standardiserade avvikelsen för prediktorvariabeln på grupp-nivån och Se är residualstandardavvikelsen på elevnivå (Tymms, 2004).

SAMMANFATTNING AV STUDIERNA

Den här avhandlingen består av tre empiriska undersökningar:

(I) Instructional responsibility in mathematics education: Modelling classroom teaching using Swedish data, *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 171-189 (2010),

(II) Measurement invariance of socioeconomic status across migrational background, accepted for publication in *Scandinavian Journal of Educational Research*, (2011) och

(III) The meaning of mathematics teaching in multilingual classrooms: Analysing effects of responsibility for learning on achievement using Swedish data, submitted for publication, (2011).

I det här kapitlet presenteras resultaten från dessa.

Resultat

De tre delstudiernas syften är: (I) att undersöka dimensionaliteten i ett undervisningsansvar som är stödjande för elevers kunskapsbildning i matematik, samt att utveckla en modell för att synliggöra dessa dimensioner av ansvar; (II) att undersöka mätinvariansen för begreppet SES då detta mäts i undervisningsgrupper med elever med olika migrationsbakgrunder, med syfte att erhålla ett mått som är valitt då SES används som kontrollvariabel i en strukturell modell; (III) att undersöka hur ansvaret för elevers kunskapsbildning i matematik i flerspråkiga klassrum påverkar elevernas prestationer samt att undersöka den pedagogiska likvärdigheten i matematikundervisningen i olika gruppansättningar.

Studie I

I den första delstudien genomfördes en latent variabelanalys med syfte att identifiera sådana dimensioner av undervisningsansvar som är stödjande för elevernas

kunskapsbildning i matematik. Undersökningen genomfördes som en flernivå konfirmatorisk faktoranalys (M-CFA; Multilevel Confirmatory Factor Analysis) och resulterade i en utvecklad flerdimensionell mätmodell för undervisningsansvar. Denna mätmodell användes sedan i delstudie III för att belysa vilken betydelse undervisningsansvar har för elevers prestationer i matematik. Mätmodellen användes också för att belysa om alla elever i grundskolan får likvärdiga förutsättningar för sitt lärande eller om undervisningen varierar beroende på andelen elever i klassen med utländsk bakgrund eller med en viss socioekonomisk nivå.

Det finns en internationell trend i matematikundervisning mot ett tydligare fokus på elevernas eget sökande efter kunskap. I Sverige gestaltas detta ofta genom arbetsformer med stort elevansvar där endast begränsad interaktion och kommunikation i förekommer. En sätt att organisera undervisningen som kommit att utvecklas i denna riktning är arbetsformen eget arbete. Genom att utveckla en modell som synliggör olika dimensioner av ansvar för att erbjuda viktiga förutsättningar för elevernas lärande är det möjligt att undersöka effekter av exempelvis ett stort elevansvar för lärprocessen. I den här delstudien har dimensionaliteten i begreppet undervisningsansvar bestämts med utgångspunkt i teorier om elevers lärande och undervisningens betydelse (Brousseau, 1997; Vygotskij, 1978). Modellens validitet undersöktes empiriskt genom att analysera dess överensstämmelse med data från TIMMS 2003, årskurs 8.

En tvånivå strukturell ekvationsmodell (M-CFA) med tre faktorer utvecklades där både elev- och grupp nivå fick beskriva det ansvar för elevernas lärprocesser som kommer till uttryck i undervisningssituationen. En av dessa faktorer antogs vara läraraktiviteten, det vill säga lärarens ansvar för att aktivt och öppet stötta eleverna i deras matematiklärande genom att exempelvis lyfta fram och förklara det matematiska innehållet, fråga och samtala med eleverna samt organisera undervisningen så att det skapas förutsättningar för interaktion och olika sociala aktiviteter. En annan dimension av ansvaret antogs vara elevaktiviteten, det vill säga lärarens ansvar för att lämna över ansvar till eleverna för deras egen konstruktion av kunskap genom att exempelvis stimulera dem till eget reflekterande och resonering kring matematiska problem. Det antogs också att undervisningsansvaret karaktäriseras av en tredje faktor som belyser att det matematiska innehållet lyfts fram som objekt i undervisningen.

Den första faktorn som beskriver *läraraktivitet* ("Teacher Responsibility for offering valid Conditions for students' mathematics learning, TRC") indikerades av observerade variabler som beskriver både elevers och lärares uppfattningar om undervisningens utformning och genomförande, se figur 7. Från elevenkäten

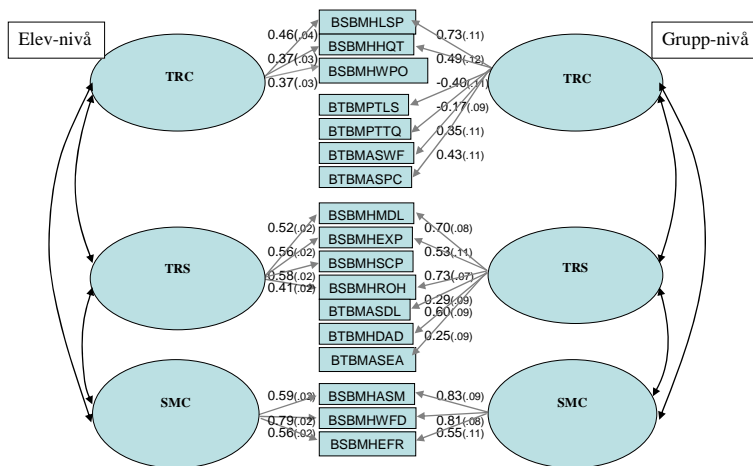
valdes tre variabler som visar hur elever uppfattar att läraren berättar, visar och har gemensamma genomgångar samt ger prov, test och problemuppgifter till eleverna. Från lärarenkäten valdes fyra variabler som visar lärares uppfattningar om hur ofta de ger anvisningar till eleverna om att arbeta med ett speciellt innehåll, hur mycket gemensamma genomgångar de har i klassen samt hur mycket de engagerar sig i att ge eleverna test och prov och uppmanar dem att öva på matematiska färdigheter.

Även den andra faktorn, *elevaktivitet* ("Teacher Responsibility for initiating Students to construct their own mathematics knowledge, TRS"), indikerades av observerade variabler som beskriver både elevers och lärares uppfattningar, se figur 7. Från elevenkäten valdes fyra variabler som visar hur elever uppfattar att de får relatera det de lär sig i matematik till sitt vardagsliv, hur de får bearbeta vad de gjort i läxa, förklara sina svar och lösningar inför klassen samt hur de själva får bestämma hur de skall gå tillväga för att lösa komplexa problem. Från lärarenkäten valdes tre variabler som visar lärares uppfattningar om hur de stimulerar till liknande elevaktiviteter, nämligen att låta eleverna relatera det de lär sig till det egna vardagslivet, diskutera läxans innehåll tillsammans i hela klassen och förklara sina svar.

Den tredje faktorn, *matematikinnehåll* ("Specific Mathematics Content, SMC"), beskrevs endast av observerade variabler från elevenkäten, se figur 7. Variablerna behandlar elevers uppfattningar om hur ofta de övar på grundläggande aritmetik, arbetar med bråk- och decimaltal samt hur ofta de formulerar ekvationer och funktioner för att representera olika samband. Om elever uppfattar att dessa olika matematikinnehåll är vanligt förekommande så är det en indikation på att läraren fokuserar på ett innehåll i undervisningen som är relevant för den årskurs undervisningen avser.

När modellen utvärderades gentemot empirisk data erhöles en godtagbar modell Anpassning, dock mer svag på grupp-nivå än på elev-nivå, och de latenta variablerna visade sig representera begreppsmässigt olika dimensioner av undervisningsansvar. För den latenta variabel som representerade läraraktiviteten (TRC) var de flesta faktorladdningarna signifikanta och medelhöga, både på elev- och grupp-nivå. Detta resultat visar att det är möjligt att urskilja en variation både inom och mellan olika klasser vad gäller läraransvaret för att aktivt stötta eleverna i deras matematiklärande. Även för den latenta variabel som representerade elevaktiviteten i lärprocessen (TRS) var alla faktorladdningar signifikanta och dessutom lite högre än för den förra faktorn. Det kan alltså konstateras att den faktor som beskrev elevaktiviteten var väl definierad genom den valda uppsättningen indikatorer och att hur eleverna fick ta ansvar för sitt eget lärande va-

rierade mellan olika klasser. Slutligen visades att även den latenta variabel som representerade hur matematikinnehållet lyftes fram som objekt i undervisningen hade fångats väl av den aktuella uppsättningen indikatorer. Se figur 7.



Notering. (Två-svans Est./S.E.<2.0, P-värde>0.05)

Figur 7. Faktorladdningar för skattade parametrar på elev- och gruppnivå [TRC: läraraktivitet, TRS: elevaktivitet, SMC: matematikinnehåll]

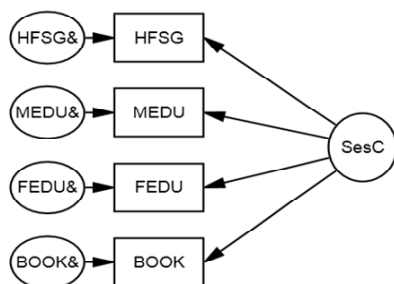
Sammantaget visar resultaten en tillfredställande överensstämmelse mellan modell och data från TIMSS 2003. Modellen har en potential att beskriva svensk matematikundervisning i årskurs 8 i enlighet med modellens dimensioner av ansvar för elevers läroprocesser. För svenska villkor med hög grad av individualiserad matematikundervisning, exempelvis uttryckt genom arbetsformen eget arbete, kan inte ett läraransvar för de tre dimensionerna av undervisningen tas för givet. Genom att i en undervisningsmodell tydliggöra olika dimensioner av ansvar för elevers matematiklärande erhåller man ett verktyg för analys av undervisningspraktiken. Till skillnad från traditionella modeller av matematikundervisning som exempelvis skiljer mellan lärar- och elevcentrerad undervisning kan den modell som är framtagen i den här studien simultant belysa olika dimensioner av ansvar. De teoretiska utgångspunkterna har varit att lärarens aktiva stöttning av eleverna är en viktig förutsättning för kunskapsutvecklingen (Brousseau, 1997; Cummins, 1984; Vygotskij, 1978) samtidigt som elevens aktivitet och konstruktion av sin egen kunskap betraktas som en annan viktig förutsättning (Brousseau, 1997; Vygotskij, 1978). En konsekvens av resultaten från denna studie är den utvecklade modellens potential att användas för att undersöka effekter

av det elevansvar för matematiklärandet som kommit till uttryck i den svenska matematikundervisningen.

Studie II

I delstudie II undersöktes om måttet på socioekonomisk status, SES, är invariant mellan grupper av elever med olika migrationsbakgrunder. Som metod för att undersöka detta användes flergrupps konfirmatorisk faktoranalys (Multiple Group CFA). Analyserna baserades på tre grupper: elever med utländsk bakgrund födda utanför Sverige (G1), elever med utländsk bakgrund födda i Sverige (G2) och elever med svensk bakgrund (G3). Undersökningen resulterade i en mätmodell för SES som senare användes i delstudie III för att kontrollera för inflytande från elevernas familjebakgrund på de effekter som påvisas av undervisningsansvaret. Modellen användes också när det undersöktes om alla undervisningsgrupper, oberoende av socioekonomisk nivå, får likvärdiga förutsättningar för sitt lärande.

Studiens huvudsyfte var att utforma en mätmodell för SES som tar hänsyn till att de indikatorer som traditionellt används för att mäta SES kan ha både olika betydelse och nivå för olika elevgrupper beroende på elevernas migrationsbakgrund. Olika effekter av att mäta SES på traditionellt sätt analyserades och därefter modifierades mätmodellen för att bättre svara upp mot de gruppskillnader som påträffades. Slutligen jämfördes både modellanpassning och prediktionsförmåga mellan den ursprungliga och den modifierade modellen. Det antogs att SES kunde återges av en CFA-modell med en latent faktor som definierades genom familjens kulturella kapital, SesC (Bourdieu, 1984; J S Coleman, 1988; Yang & Gustafsson, 2004). SesC indikerades av fyra manifesta variabler från elevenkäten. En av dessa beskrev hur många böcker det finns i elevens hem (BOOK), två variabler beskrev mammans respektive pappans utbildningsnivå (MEDU, FEDU) och en fjärde elevernas studieambitioner (HFSG). Se figur 8.



Figur 8. Mätmodell för SesC

Den manifesta variabeln BOOK indikerar den typ av familjekapital som överensstämmer med de symboliska och sociala förväntningarna på det nuvarande utbildningssystemet. I tidigare studier har emellertid indikatorn uppvisat stora skillnader mellan elever med utländsk och svensk bakgrund. Variablerna MEDU och FEDU används ofta för att indikera SES, men vilken betydelse föräldrarnas utbildningsnivå har för elevernas möjligheter att prestera i olika skolämnen har visat sig variera mellan olika elevgrupper. Variabeln HFSG slutligen har en stark relation till SES och kulturellt kapital och även till elevernas prestationer, men både nivå och innebörd i elevernas studieambitioner har visat sig variera mellan olika etniska grupper av elever. Det fanns alltså anledning att undersöka hur dessa olika villkor påverkar ett traditionellt sätt att mäta SES där inga hänsyn tas till motsvarande gruppskillnader.

Mätinvariansen i SES-modellen analyserades för att undersöka olika effekter av att mäta SES på traditionellt sätt i elevgrupper där både G1, G2 och G3 finns representerade. För denna analys användes flerggrupps CFA som kortfattat innebär att man lägger restriktioner på modellen vilket tvingar en eller flera parametrar att skattas lika mellan olika grupper. Sedan jämförs modellenpassningarna för den modell som har flera restriktioner med den modell som har färre restriktioner på parametrarna. För att undersöka mätinvarians testas dels om det råder en svag faktorinvarians vilket görs genom att undersöka hur mönstret av faktorladdningar ser ut (konfigurativ invarians), dels genom att testa om det råder en stark faktorinvarians vilket görs genom att undersöka om faktorladdningarna är lika mellan de olika grupperna (metrisk invarians) och till sist testas om mätnivåerna på de manifesta variablerna är lika mellan grupperna (skalär invarians). Tidigare har mest metrisk invarians undersökts men på senare tid har det blivit allt vanligare att även skalär invarians utreds, bland annat beroende på ett ökat intresse att jämföra olika gruppers medelvärden av latent variabler. Om inte mätinvarians skulle föreligga är det möjligt att modifiera mätmodellen för att den bättre skall svara upp mot de gruppskillnader som påträffats, vilket kan göras genom att skapa modeller med restriktioner på vissa parametrar. Sådana modeller kallas partiellt invarianta modeller. Det är emellertid inte väl beforskat vilka konsekvenserna är av att använda dessa modeller.

Då mätinvariansen undersöktes i den här studien analyserades både metrisk och skalär invarians. Resultaten visade att den föreslagna SES-modellen var både konfigurativt och metriskt invariant, men däremot rådde inte skalär invarians. Nivåerna på de båda indikatorerna antal böcker i hemmet och moderns utbildningsnivå varierade så mycket mellan elevgrupperna att modellenpassningen försämrades avsevärt om man inte lät dessa parametrar skattas fritt inom respektive

grupp. En modell anpassades därefter med restriktioner om lika faktorladdingar och intercept på samtliga indikatorer, andra parametrar i modellen däremot tilläts variera fritt mellan grupperna. Denna modell, ”samtliga restriktioner” (fully constrained model, FULLC), visade dålig anpassning. I en modell med endast ”partiella restriktioner” (partially constrained model, PARTC), där restriktionerna om lika intercept var borttagna för indikatorerna BOOK och MEDU, blev modell-anpassningen emellertid utmärkt. Sammantaget visade dessa resultat att den enda betydelsefulla bristen på mätinvarians över de tre elevgrupperna var orsakad av intercepten för indikatorerna antal böcker i hemmet och moderns utbildningsnivå.

Konsekvenserna av att förlita sig på den väl passande PARTC-modellen undersöktes genom att jämföra de olika gruppernas SES-medelvärden, dels skattade genom FULLC-modellen och dels genom PARTC-modellen. Eftersom SES ofta används för att kontrollera för gruppskillnader i socioekonomisk status när man skattar olika resultat så genomfördes också en analys av hur modellen betedde sig när SesC relaterades till prestationsvariabeln. Det visade sig då att valet av modell kan leda till dramatiskt olika resultat. Den skattade SES-nivån i G3, elever med svensk bakgrund, blev med FULLC-modellen avsevärt högre än medelvärdet för G1, medan motsvarande jämförelse när PARTC-modellen användes resulterade i ett lägre SES-medelvärde för G3 än för G1. Hur prestationsskillnaderna mellan elevgrupperna skattades påverkades också av vilken modell som användes. Exempelvis blev dessa skillnader mycket för stora om PARTC-modellen användes.

När PARTC-modellen relaterades till prestationsresultaten erhöles en dålig modell-anpassning men fortsatta analyser visade att anpassningen förbättrades om residualerna för BOOK- och HFSG-indikatorerna adderades som oberoende variabler i regressionsmodellen. Denna prediktionsförmåga av testresultaten som residualerna visade sig ha var emellertid inte olika i de tre grupperna, inte heller var SES prediktionsförmåga olika i grupperna. Motsvarande resultat erhöles då FULLC-modellen analyserades. Detta resultat antydde bland annat att samtidigt som variablerna antal böcker i hemmet och elevernas studieambitioner är indikatorer för SesC så tycks de ha en kausal effekt på prestationsresultaten, dock lika i alla grupper.

Undersökningen visade alltså att det fanns metrisk invarians mellan de tre grupperna varför det gick att hävda att den latent variabeln SesC hade samma innebörd för alla grupper så som den var definierad av de fyra indikatorerna. Däremot fanns inte skalär invarians eftersom intercepten för indikatorerna antal böcker i hemmet och moderns utbildningsnivå var avsevärt högre i gruppen med

svensk bakgrund än i grupperna med utländsk bakgrund. Genom att tillåta intercepten för dessa två variabler att variera mellan grupperna kunde en modell med partiell skalär invarians, vilken hade god modellanpassning, anpassas till data. Denna modell genererade emellertid dramatiskt avvikande estimat för det latent medelvärdet jämfört med den modell i vilken det var lagt restriktioner om att alla intercept skulle vara lika. Om SesC används som kontrollvariabel så skulle de båda modellerna generera olika resultat. Hur skalär invarians skall hanteras visade sig alltså vara problematiskt.

Olika tänkbara lösningar på problemet presenterades. En skulle kunna vara att utesluta sådana indikatorer som har olika intercept i olika grupper. Denna lösning ansågs emellertid inte vara att föredra eftersom det är brist på andra lämpliga indikatorer och eftersom de flesta indikatorerna uppvisar liknande interceptskillnader. Ett annat sätt att hantera problemet skulle kunna vara att använda modellen med partiella restriktioner vilken uppvisade god modellanpassning. Elever med svensk bakgrund skulle då få en skattad lägre SES-nivå än elever med utländsk bakgrund vilket inte är rimligt. Om denna skattning av SES skulle användas som kontrollvariabel skulle den ytterligare öka den skattade prestationsfördelen för elever med svensk bakgrund. Slutsatsen drogs därför att den partiella modellen inte är attraktiv att använda. En tredje tänkbar lösning skulle kunna vara att använda en modell med sämre modellanpassning i vilken det är lagt restriktioner om att interceptparametrarna skall vara lika i alla grupper. En sådan modell skulle inte ha något dåligt inflytande över den metriska invariansen och estimaten av de latent SesC-medelvärdena tycktes även vara rimliga. Men den sämre modellanpassningen skulle kunna innebära allvarliga problem. En fjärde tänkbar lösning skulle kunna vara att återge SES-variabeln med formativa indikatorer i stället för reflexiva. De vanligaste indikatorerna som brukar användas för detta är utbildningsnivå, inkomst och yrkesstatus. Formativa indikatorer är emellertid inte lika användbara för att definiera det kulturella kapitalet som de är då man för vuxna definierar den socioekonomiska dimensionen av SES. Det fanns visserligen resultat i studien som stödde att indikatorerna antal böcker i hemmet och elevernas studieambitioner både var indikatorer för SesC och hade en kausal effekt på prestationsresultaten vilket antydde att de skulle kunna användas som formativa indikatorer av den latent SesC-variabeln. Men uppsättningen indikatorer var alldeles för liten för att det skulle vara möjligt att definiera SesC.

Det behövs alltså mer forskning för att bestämma vilken ansats som är optimal att använda för SES i grupper med elever med olika migrationsbakgrund. En rekommendation som lämnades i delstudie II var emellertid att undvika mo-

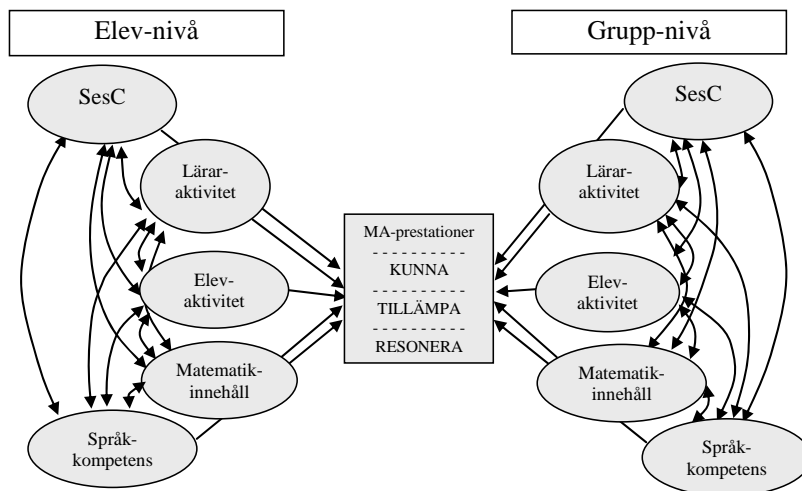
deller med partiell skalär invarians när man undersöker skillnader i latent medelvärden. Avslutningsvis framhölls att analyser av olika relationer mellan förklaringsfaktorer för variationer av elevers och gruppers prestationsresultat blir meningsfulla om forskaren är medveten om alla utmaningar som är förenade med att mäta SES på ett godtagbart sätt.

Studie III

I delstudie III genomfördes en flernivå strukturell ekvationsmodellering (M-SEM; Multilevel Structural Equation Modelling) för att undersöka relationen mellan matematikprestationer i flerspråkiga klassrum och *undervisningsansvaret* för elevernas lärande ("REsponsibility for students' Learning processes, REL"). Denna delstudie utgick ifrån den mätmodell för undervisningsansvar som utvecklats i delstudie I (Hansson, 2010) samt den mätmodell för socioekonomisk status som utvecklats i delstudie II (Hansson & Gustafsson, 2011). Av föreslagna alternativa sätt att hantera den skalära invariansen i den senare mätmodellen valdes att skatta interceptparametrarna lika i alla grupperna. Resultaten visade ett positivt samband mellan elevernas matematikprestationer och undervisning som utmärks av att läraren tar ansvar för att aktivt stötta eleverna i deras lärande samt lyfta fram och förklara det matematiska innehållet. Det visade sig också finnas ett samband mellan grupsammansättning, i termer av elevernas sociala och språkliga bakgrund, och hur matematikundervisning utformas. I klasser med hög andel elever födda utomlands eller med låg socioekonomisk status tar lärare mindre ansvar för elevernas lärande än i andra klasser. Detta visar att det förekommer pedagogisk segregation inom den svenska matematikundervisningen.

För att nå syftet att påvisa sambandet mellan prestationer och det sätt ansvaret för matematiklärandet kommer till uttryck i undervisningen samt undervisningens likvärdighet utvecklades en strukturell modell för både elev- och grupp nivå, se figur 9. Modellen utgick från antagandet att undervisningsansvar är flerdimensionellt och beskrivs genom de tre dimensionerna: *lärarakтивitet* där läraren aktivt och öppet stöttar eleverna i deras matematiklärande genom att exempelvis lyfta fram och förklara det matematiska innehållet, fråga och samtala med eleverna samt organisera undervisningen så att det skapas förutsättningar för interaktion och olika sociala aktiviteter, *elevaktivitet* där läraren lämnar över ansvar till eleverna för deras egen konstruktion av kunskap genom att exempelvis stimulera dem till eget reflekterande och resonande kring matematiska problem, och slutligen en dimension som belyser att det *matematiska innehållet* lyfts fram som objekt i undervisningen. Se figur 9. Dessa dimensioner infördes på både elev- och grupp nivå. Studien byggde på hypotesen att elevernas matematikprestationer påverkas positivt om lärare tar ansvar för att erbjuda

undervisningsmiljöer som är karakteriserade av modellens tre dimensioner. Modellen gjorde det möjligt att samtidigt fokusera på de tre dimensionerna av ansvar vilka var identifierade genom att kombinera information från både elever och lärare. Den analytiska nivån var grupp-nivån vilken var indikerad av både lärardata och aggregerad elevdata. Se figur 9.



Figur 9. Strukturell modell för undervisningsansvar för elevers lärprocesser (REL). Elev- och grupp-nivå

En annan hypotes var att klassens sammansättning med avseende på elevernas språkkompetenser och socioekonomiska status påverkar både prestationsnivåer och hur undervisningsansvaret kommer till uttryck i matematikundervisningen (Cummins, 1984; Gibbons, 2006; Skolverket, 2008a; Yang & Gustafsson, 2004). För att urskilja undervisningsansvarets specifika påverkan på prestationsnivåerna behövde därför effekterna kontrolleras för olika grupsammansättningar. För att möjliggöra detta infördes två kontrollvariabler, en som indikerade elevernas *språkkompetens* samt en som indikerade den kulturella dimensionen av elevernas *socioekonomiska status* (SesC). Den beroende variabeln *matematikprestationer* redovisades dels som ett standardiserat totalt mått på prestationsnivå men också som tre språkrelaterade variabler. För att undersöka om elever i behov av språklig stöttning i sitt matematiklärande är mer beroende än andra av en lärmiljö med aktivt lärarstöd, elevaktiviteter och ett tydligt innehållsligt fokus analyserades om undervisningsansvaret hade ett tydligare samband med språkligt relaterade testuppgifter än med andra. För att göra detta relaterades undervisningsansvaret till testuppgifter som var kategoriserade i tre kognitiva och

språkliga domäner, *kunna*, *tillämpa* och *resonera*, där *tillämpa* och *resonera* var de mest språkligt orienterad. Se figur 9.

Genom att undersöka relationen mellan en dimension i taget av undervisningsansvaret och matematikprestationerna och samtidigt tillföra en kontrollvariabel åt gången i modellerna, erhöles resultat som visade att både gruppernas sammansättning och hur undervisningsansvaret kommer till uttryck i undervisningen förklarar en betydande del av prestationsvariationerna. Den dimension av undervisningsansvaret som representerade läraraktiviteten visade efter kontroll för inflytande från klassernas sammansättning ett positivt samband med prestationsnivåerna, med en effektstorlek på 0.44 vilket kan anses vara relativt högt (Hattie, 2009). Det högsta sambandet var för språkligt relaterade testuppgifter. Den andra dimensionen av undervisningsansvaret, elevaktiviteten, uppvisade också ett positivt samband med prestationerna. Efter kontroll för inflytande från klassernas sammansättning försvann emellertid detta samband, vilket kan indikera en påverkan från exempelvis någon form av differentiering av undervisningsgrupperna. För den tredje ansvarsdimensionen, matematikinnehållet, uppvisades oväntat resultat, ty den var endast relaterad till prestationerna efter att det kontrollerats för gruppernas språkkompetens och då var sambandet negativt. Med kontroll även för socioekonomisk status upphörde detta samband vilket visar att dimension var relaterad till gruppens sociala sammansättning och inte till undervisning. Dessutom visades att hur undervisningsansvaret kom till uttryck hade ett samband med hur klasserna var sammansatta.

Sammantaget visade delstudie III att om framför allt den första dimensionen av undervisningsansvaret, läraraktiviteten, var framträdande i undervisningen hade det positiv inverkan på gruppernas prestationer i matematik. Likaså visade sig läraraktivitet vara särskilt viktig för sådana testuppgifter som hade en språklig dimension vilket kan antyda att elever som inte har undervisningsspråket väl utvecklat är speciellt beroende av att läraren tar ansvar för att vägleda och stötta dem i deras processer mot mer komplexa strukturer av kunnande genom att exempelvis lyfta fram och förklara det matematiska innehållet och skapa förutsättningar för interaktion och sociala aktiviteter i matematikklassrummet. De empiriska resultaten visade också att ju högre andel elever med bristande språkkompetens eller med låg socioekonomisk status det fanns i klassen desto mer troligt var det att eleverna själva fick ta ett stort ansvar för hela lärprocessen. Vidare visades att klasser med en stor andel elever med låg socioekonomisk status var negativt relaterad till prestationsnivåerna medan däremot prestationsnivåerna inte hade något tydligt samband med andelen elever födda utomlands. Dessa resultat överensstämmer i vissa delar med studiens teoretiska utgångspunkter.

Genom ett uttalat undervisningsansvar institutionaliseras elevernas matematik-kunskaper, vilket innebär att deras kunskapsutveckling möjliggörs och att kunskaperna blir socialt och kulturellt accepterade och därför användbara i kontexter utanför skolan (Brousseau, 1997). Lärarens engagemang i stödjandet och vägledningen av eleverna i deras utvecklingsprocesser är således av central betydelse (Bruner, 1960; Vygotskij, 1978). Däremot strider de resultat som påvisar pedagogisk segregation i matematikundervisningen mot de teoretiska utgångspunkterna. De elevgrupper som förväntas ha störst behov av lärarstöd för sin språkliga och matematiska utveckling (Cummins, 1984; Gibbons, 2006) får minst av detta stöd.

DISKUSSION OCH SLUTSATSER

I den här avhandlingen har huvudsyftet varit att undersöka matematikundervisningens betydelse för elevers möjligheter att utveckla sina matematikkunskaper. Detta mot bakgrund av att matematikresultaten under de senaste 20 åren har försämrats parallellt med en ökad individualisering av matematikundervisningen där ansvaret för läroprocessen skjuts över till eleverna själva. Under samma period har även den etniska, sociala och kunskapsmässiga differentiering av undervisningsgrupperna ökat. Utifrån teoretiska antaganden om att elevers möjligheter att lära matematik påverkas av hur ansvaret för läroprocessen kommer till uttryck i undervisningen har en undervisningsmodell utvecklats som belyser betydelsefulla dimensioner av detta ansvar. Med beaktande av elevernas socioekonomiska och språkliga bakgrunder har denna modell sedan använts för att undersöka samband mellan undervisningsansvar och matematikprestationer. Även samband mellan grupsammansättning och på vilket sätt undervisningsansvaret utövas har undersökts. Vissa metodologiska begränsningar och briser i data, TIMSS 2003 åk 8, har dock inneburit att modellens potential inte fullt ut kunnat utnyttjas vilket senare diskuteras.

Undervisningsmodellen beskriver tre dimensioner av matematikundervisning vilka läraren har ansvar för att planera och genomföra. Den första beskriver lärarens ansvar för att aktivt och öppet stötta eleverna i deras matematiklärande vilket de exempelvis kan göra genom att lyfta fram och förklara det matematiska innehållet, fråga och samtala med eleverna eller på annat sätt ta reda på deras kunskaper och erfarenheter. Att organisera undervisningen så att det skapas förutsättningar för interaktion och olika sociala aktiviteter är ett annat sätt att aktivt stötta eleverna. Den andra dimensionen beskriver hur läraren lämnar över ansvar till eleverna själva för deras egen konstruktion av sin kunskap, vilket kan ske antingen individuellt eller i interaktion med andra. Läraren behåller dock det överordnade ansvaret att exempelvis förbereda övningar och stötta eleverna. Den tredje dimensionen visar lärarens ansvar för att lyfta fram det matematiska innehållet som objekt för undervisningen.

Resultaten av studien kan sammanfattas med att det har positiva effekter på elevernas matematikprestationer om läraren tar ansvar för lärprocessen genom att aktivt vägleda eleverna i deras kunskapsutveckling. Dessa effekter kvarstår även efter att resultaten kontrollerats för påverkan från grupsammansättningar med avseende på elevernas socioekonomiska status eller språkliga bakgrund. Resultaten visar emellertid att detta undervisningsansvar mer sällan förekommer i klasser med stor andel elever med låg socioekonomisk status eller med bristande kompetenser i undervisningsspråket. Matematiska samtal och gemensamma genomgångar med förklaringar av det matematiska innehållet förekommer alltså inte lika ofta i dessa klasser som i andra, detta trots att resultaten även indikerar att dessa elever mer än andra är beroende av denna typ av undervisning.

Sammantaget visar resultaten att lärarens aktiva undervisning och vägledning av eleverna är viktig för deras möjligheter att prestera i matematik, men samtidigt att svensk matematikundervisning präglas av pedagogisk segregation där grupper med stort behov av lärarstöd får mindre av det än andra grupper. Pedagogisk segregation tillsammans med ett allt större ansvar för matematiklärandet lagt på eleverna själva i stället för på lärarna kan antas vara en bidragande orsak till den negativa kunskapsutveckling som Sverige uppvisat under senare tid. Nedan diskuteras dessa resultat samt implikationer och förslag till fortsatt forskning.

Effekter av undervisningsansvar

Under senare delen av 1900-talet har det skett en övergång från att tala om jämlik utbildning till att mer tala om likvärdig utbildning där skolan som system inte är i centrum utan mera individers behov och livsprojekt (Wallin, 2002). Detta har inneburit, menar Wallin, att samtalet om den jämlika skolan har fått träda tillbaka till förmån för ett samtal om hur skolan genom att anpassa sin verksamhet till individers behov och villkor kan skapa goda förutsättningar för barns och ungdomars lärande. Wallin konstaterar att den tidigare strävan efter jämlik utbildning i betydelsen lika chanser till alla visserligen ledde till höjd utbildningsnivå i samhället men inte till jämlik utbildning i betydelsen minskade klyftor relaterat till klass, kön och etnicitet. Detta innebär emellertid inte att det finns motsättningar mellan jämlik och likvärdig utbildning, utan snarare mellan olika medel för att nå jämlik utbildning. Att sträva efter jämlikhet genom att göra utbildningen tillgänglig för alla, så kallad egalitär jämlikhet, har inte räckt för att nå målen (Florin & Johansson, 2002; Lindensjö & Lundgren, 2002). Att göra undervisningen likvärdig i den meningen att den är anpassad till vars och ens behov är ett annat medel att nå jämlikhet med minskade klyftor mellan olika grupper av elever. Med ut-

gångspunkt i Nussbaums (2000) och Sens (1987, 1988) moralfilosofiska teorier om rättvisa innebär anpassning till vars och ens behov att eleverna med stöd från matematikundervisningen får sådana kunskaper att de i olika sammanhang i livet kan agera som demokratiska medborgare och göra fria val. Men hur skall denna likvärdiga undervisning genomföras i praktiken? Vilken betydelse har det om det är läraren eller eleven själv som har det huvudsakliga ansvaret för lärprocessen? Får alla elever tillgång till likvärdig undervisning, eller påverkar gruppsammansättningen detta? I följande avsnitt diskuteras dessa frågor utifrån resultaten i avhandlingens tre delstudier.

Bakgrundsfaktorer

I detta avsnitt diskuteras resultat som rör individuella förklaringsfaktorer.

Migrationsbakgrund

Att elevers språkliga kompetens kan antas ha betydelse för deras möjligheter att tillgodogöra sig matematikundervisning och lära matematik grundas i Vygotskijs teorier om språkets roll i lärprocessen (Vygotskij, 1986). För att flerspråkiga elever utan hinder skall kunna tillägna sig matematikkunskaper har en teoretisk utgångspunkt också varit att matematikundervisningen skall stödja elevens språkutveckling i båda språken (Cummins & Swain, 1986). Denna tröskeleffekt stöds också av empiriska resultat (Atweh & Clarkson, 2002; Clarkson, 2007; Cummins & Swain, 1986; Ellerton & Clarkson, 1996; Seceda, 1992; Setati, 2001; Silby, 2000). Betydelsen av lärares vägledning och stöttning av elevernas språk- och matematikutveckling är teoretiskt grundad (Brousseau, 1997; Bruner, 1960; Cummins, 1984; Gibbons, 2002; Vygotskij, 1978) och har även stöd i empiriska studier (Elmeroth, 2006; Jamieson, et al., 2004). Förutom undervisning så är språkutveckling också relaterat till elevens tid i landet (Collier & Thomas, 2002), vilket styrks av att de elever med utländsk bakgrund som kommit till Sverige före 7 års ålder uppvisar samma resultat som de som är födda i landet och ju äldre de varit när de anlänt till Sverige desto lägre resultat uppvisas (Skolverket, 2009b).

Elevers språkkompetens har med utgångspunkt i dessa teorier antagits vara en bakgrundsfaktor med betydelse för matematikprestationerna. Grupper med stor andel elever med svaga språkkompetenser antas därför vara i stort behov av undervisning som präglas av att läraren tar ansvar för att stödja både deras språk- och matematikutveckling. Språkfaktorns förmodade inflytande över både elevernas prestationsresultat och undervisningens utformning har motiverat att införa den som kontrollvariabel i studiens analysmodeller. Resultaten av analyserna i delstudie III visar också ett samband mellan låga matematikresultat och hög andel elever med brister i undervisningsspråket. Relaterat till de teoretiska utgångs-

punkterna var dock sambandet svagare än förväntat. Sambandet mellan språkkompetens och undervisningens utformning var däremot tydligt. Dock var hög andel elever i gruppen med bristande språkkompetens relaterat till ett svagt uttalat läraransvar för undervisningen (korrelation, $-0,6$), tvärt emot vad som var förväntat. Detta återkommer jag till i diskussionen nedan om pedagogisk segregation.

Det är inte troligt att språkfaktorns överraskande låga relation till prestationsnivåerna skulle bero på att denna inte är relaterad till elevernas matematikprestationer, ty statistik över resultat visar motsatsen. Det starka samband (korrelation, $-0,55$) som finns mellan språkfaktorn och socioekonomisk status, SES, kan däremot ha inneburit att effekterna av språkfaktorn upptagits av de effekter SES har på prestationerna. Att det förhåller sig så indikeras även av att språkfaktorn faktiskt uppvisade ett starkt samband med prestationerna innan detta kontrollerades för inflytande från SES. Ytterligare en orsak till den låga korrelationen kan vara bristande validitet i det mått som använts på elevens språkkompetens. Språkfaktorn har definierats av en dummyvariabel som genom att kategorisera eleverna som födda inom eller utanför landet indikerat hur länge de vistats i Sverige. Som tidigare diskuterats har det betydelse för elevernas skolprestationer hur länge de varit i landet, alltså inte bara om de är födda utomlands eller ej. Detta innebär att gruppen födda utomlands inte är en homogen grupp vad gäller språkkompetenser med betydelse för matematikprestationerna. Gruppen kan omfatta elever med svagt utvecklade språkkompetenser såväl som väl utvecklade. En ytterligare uppdelning av elevgruppen född utomlands i undergrupper, relaterade till ålder vid ankomsten till Sverige, har dock inte varit möjlig eftersom undergrupperna då skulle ha blivit för små för att utgöra underlag för säkra statistiska analyser. Tillgång till ett språktest med hög validitet hade varit önskvärt, men tyvärr finns inte någon sådan variabel i TIMSS-data. Med hänsyn till dessa brister i måttet på språkkompetens indikerar resultaten emellertid att det finns ett signifikant samband mellan andelen elever i klassen med en viss språklig bakgrund och hur undervisningsansvaret kommer till uttryck i matematikundervisningen. I motsats till vad som antogs är detta samband negativt, ju fler elever i klassen med svaga språkkompetenser desto mindre läraransvar för elevernas kunskapsutveckling i matematik.

Socioekonomisk status

Resultat från Colemanrapporten (J S Coleman, et al., 1966) visar att individuella bakgrundsfaktorer som exempelvis SES har stort inflytande på elevers prestationer. Dessa resultat har sedan bekräftats i många empiriska studier (se t.ex, Jencks

et al., 1972; Shavit & Blossfeld, 1993; Sirin, 2005). Korrelationen mellan SES och elevernas prestationer är omkring 0.30 på elevnivå och 0.60-0.80 på gruppnivå (Gustafsson, 1998; White, 1982), vilket gör att SES är en av de starkaste påverkansfaktorerna på skolprestationer (Sirin, 2005). Den dimension av SES som visat sig ha störst inflytande över prestationerna är den som beskriver familjernas kulturella kapital (Yang & Gustafsson, 2004), vilket i Bourdieus teori om familjekapital är en av tre dimensioner, där de andra är socialt och ekonomiskt kapital. Betydelsen av SES och vad som indikerar kulturellt kapital skiljer sig emellertid mellan olika elevgrupper. Elmeroth (2006) problematiserar detta i en studie och visar att det finns god grund för antagandet att det inte råder mätnvarians av SES i undervisningsgrupper med elever med olika migrationsbakgrund. Så som SES traditionellt mäts kan man ifrågasätta validiteten i vedertagna indikatorer. Exempel på sådana indikatorer är föräldrarnas utbildningsnivå, antalet böcker i elevernas hem och elevernas studieambitioner. Även om föräldrarnas utbildningsnivå är en av de mest stabila indikatorerna på SES (Sirin, 2005), kan utbildningsnivåerna och innebörden i att ha hög eller låg utbildning variera mellan elevernas ursprungsländer. Vad gäller sambandet mellan antal böcker i hemmet och SES är detta mycket komplext i heterogena grupper. Anledningen till att antal böcker skiljer sig avsevärt mellan olika hem kan förutom att det återspeglar familjernas olika status också vara relaterat till omständigheter förknippade med migration (Elmeroth, 2006). Likaså kan betydelsen av många böcker för familjens status variera mellan olika ursprungsländer. Även nivån på elevernas utbildningsambitioner kan variera och ha olika betydelse beroende på migrationsbakgrund och inte endast beroende på familjernas kulturella kapital (Bons, 2003; Goldstein-Kyaga, 1995; Knocke & Hertzberg, 2000; Ljung, 2000; Lundqvist, 2005; Skolverket, 2004). Det finns också empiriskt stöd för att SES inte påverkar prestationerna i lika hög grad för elever med utländsk bakgrund som för elever med svensk bakgrund (Elmeroth, 2006; Skolverket, 2004).

För att nå avhandlingens syfte att belysa samband mellan undervisningsansvar och matematikprestationer samt likvärdigheten i matematikundervisningen har det därför varit nödvändigt att kontrollera för inflytande från SES. För att möjliggöra dessa analyser i flerspråkiga grupper har en analys gjorts av mätnvariansen i SES då eleverna har olika migrationsbakgrunder. Resultatet visar stor överensstämmelse med grundantagandet att SES förklarar en stor del av undervisningsgruppernas prestationer i matematik (korrelation, 0.7) och även att familjernas kulturella kapital är en betydelsefull prediktor av klassernas prestationsnivåer. Av detta följer att svensk matematikundervisning inte kan sägas motverka inflytandet från elevernas familjebakgrund på ett kraftfullt sätt, vilket

också överensstämmer med det som noterats i en Skolverksrapport (2009b) om ökande sociala och kunskapsmässiga klyftor i svensk skola. Vad gäller mätinvariansen, om de variabler som används för att indikera SES har samma betydelse och struktur för olika elevgrupper, visar emellertid resultaten i delstudie II delvis överensstämmande, men även överraskande resultat jämfört med tidigare studier. Ett överraskande resultat är att SES inte förklarade olika mycket av prestationerna för olika elevgrupper. Inte heller har de använda indikatorerna olika innebörd och betydelse för olika elevgrupper. Som konstaterades tidigare var det förväntat att SES både skulle ha lägre effekt för elever med utländsk bakgrund samt avvikande innebörd av indikatorerna. Att så inte är fallet tyder på hög validitet i det traditionella måttet på SES, vilket emellertid inte var förväntat. Där emot visades att det finns så stora skillnader mellan gruppernas nivåer på två av de använda indikatorerna att det påverkar mätinvariansen, och därmed modellanpassning och skattade parametrar. Nivån på moderns utbildningsnivå och antalet böcker i hemmet skiljer sig mycket mellan elever med utländsk och svensk bakgrund. Att beakta dessa skillnader med hjälp av de skattningsmetoder som står till buds visade sig först lösa problemet med bias i olika skattningar, men senare även skapa nya problem med oönskade effekter. Exempelvis blev de skattade SES-nivåer då för låga för elever med svensk bakgrund och det skattade prestationsgapet mellan elevgrupper med utländsk och svensk bakgrund blev för högt. Hur denna problematik med olika nivåer på indikatorerna på bästa sätt skall hanteras då SES exempelvis används som kontrollvariabel behöver alltså undersökas närmre. En möjlig lösning skulle kunna vara att använda en annan uppsättning indikatorer än de traditionella. Det urval av möjliga variabler som finns i TIMSS-data utgör emellertid en begränsning och skulle därför behöva utvidgas. För det behövs mera kunskap om familjestatus i olika ursprungsländer och om vad som påverkar status vid emigration, exempelvis när personer hamnar utanför arbetsmarknaden eller då de inte kan upprätthålla sitt ursprungliga yrke.

I delstudie III där betydelsen av olika dimensioner av undervisningsansvar för klassernas prestationer i matematik analyserades var det även nödvändigt att kontrollera för individuella bakgrundsfaktorer som påverkar prestationerna. Till skillnad från den språkliga faktorn så visar sig klassens SES-nivå vara starkt relaterad till prestationerna. Ju högre andel elever från hem med låg SES-nivå desto lägre är klassens medelvärde på matematiktestet. När det gäller sambandet mellan grupp sammansättning och undervisningens utformning har däremot både den språkliga faktorn och SES en negativ relation till undervisningsansvaret, vilket innebär att lärare oftare tar ett stort ansvar för elevernas kunskapsutveckling i

klasser med stor andel elever med hög SES och med goda språkkompetenser än i andra klasser. Brist på observerade variabler för att indikera SES kan emellertid ha inneburit brister i validitet och mätinvarians.

Undervisningsansvar

Det är inte ovanligt att orsaker till elevers svaga skolprestationer söks bland individuella bakgrundsfaktorer som exempelvis SES och migrationsbakgrund konstaterar Elmeroth (2006). Dumay och Dupriex (2007) hävdar däremot att många effektstudier styrt bort från att belysa effekter av dessa bakgrundsfaktorer vilka initialt belystes i Colemanrapporten (1966). Studierna koncentrerar sig i stället på att endast belysa effekter av olika undervisningsfaktorer med syfte att visa hur skolundervisning kan göra skillnad för elever från hemmiljöer som inte är stödjande för deras kunskapsutveckling. I en metastudie av Hattie (2009) finns också många liknande forskningsresultat redovisade. Dumay och Dupriez (2007) menar att om man i stället undersöker olika sammansättningseffekter så kan betydelsen av både individuella bakgrundsfaktorer och olika undervisningsfaktorer belysas, samt även undervisningens likvärdighet. I de studier som genomförts i den här avhandlingen med användande av flernivå strukturell ekvationsmodellering har det varit möjligt att beakta samtliga dessa faktorer.

I detta avsnitt diskuteras de resultat som rör effekter av undervisningsansvar, relaterade till effekter av individuella bakgrundsfaktorer, medan sammansättningseffekter diskuteras i nästkommande avsnitt. Även om studien haft teorier om elevers lärprocesser som utgångspunkt för utveckling och analys av en undervisningsmodell har emellertid inte processer studerats, utan undervisning som fenomen. Undervisningsansvar har betraktats som en förutsättning och ett villkor för elevernas olika lärprocesser. Att belysa effekter av alla dimensioner av undervisningsansvar simultant visade sig inte vara möjligt, vilket har sin grund i den höga korrelationen mellan de tre faktorerna i modellen. Försättningsvis diskuteras därför resultaten för en dimension i taget.

Både Vygotskij (1926/1997, 1978, 1997) och Brousseau (1997) har ett individperspektiv på elevens lärande och betraktar elevens aktivitet som en förutsättning för lärprocessen. Att bara kommunicera kunskapen till eleven räcker således inte enligt dessa teorier. I den undervisningsmodell som legat till grund för analyserna i avhandlingens olika delstudier speglas dessa elevaktiviteter i en av ansvarsdimensionerna, lärarens ansvar för att lämna över ansvar till eleverna för deras egen konstruktion av sin kunskap. Vygotskij betonar de sociala faktorerna i elevernas aktiviteter där kommunikation, språk och interaktion är centrala medierande faktorer. Brousseau betonar mer de didaktiska strukturerna i undervisningsmiljön, där miljön exempelvis skall erbjuda "situations of action" med

förutsättningar för adidaktiska situationer där eleverna själva kan lösa problem som liknar verkligheten och betraktas som fria från didaktiska intentioner. Att skapa en sådan miljö betraktas i Brousseaus teori som att läraren spelar ett spel med eleverna och genom "devolution" överlämnas ansvar för lärandet till eleven själv. Den ansvarsdimension som beskriver hur läraren lämnar över ansvar till eleven återgavs i delstudie I och II av observerade variabler som mestadels indikerade dimensionen på ett indirekt sätt. Det saknades variabler som mer direkt indikerade de teoretiska utgångspunkterna. Resultaten visar ingen signifikant positiv relation mellan denna dimension och matematikprestationerna när det kontrollerats för inflytande från SES, vilket kan bero på att de observerade variablerna varit mycket nära relaterade till klassens socioekonomiska nivå. Att dimensionen som beskriver elevaktiviteten inte visar sig påverka prestationerna kan också bero på att det finns ej observerade interaktionsfaktorer inblandade, exempelvis differentiering på skolenivå. En skolegregationsfaktor hade kunnat kontrollera för inflytande från exempelvis boendesegregation och det fria skolvalet. Eftersom skolegregationen är betydande (Skolverket, 2009b) hade det varit intressant att analysera detta via en utvidgning till tre nivåer i den strukturella ekvationsmodellen, men detta har emellertid inte varit tekniskt möjligt.

Innebär överlämnandet av ansvar till eleverna för deras eget lärande att lärarens ansvar för lärprocessen därmed minskar? Med en radikalkonstruktivistisk syn på lärande skulle man kunna tolka det så eftersom de helt individuella kognitiva strukturerna av automatik betraktas leda till allmänna, socialt och kulturellt accepterade standardkunskaper (Von Glasersfeld, 1995), sådana Brousseau kallar "le savoir savant". Både Brousseaus och Vygotskijs teorier bygger emellertid på att det för detta även behövs en lärare som förutom att stötta eleven i sin individuella lärprocess även kan ge ett externt perspektiv på den individuella kunskapen för att den därigenom skall bli användbar utanför skolkontexten. I Brousseaus teori, där dessa mekanismer kallas institutionalisering, fokuseras lärarens ansvar mycket på intervention i elevens lärprocess. Interventionen handlar om att arrangera miljön, att informera sig om elevens erfarenheter och kunskaper samt att utforma utmanande och verklighetsrelaterade problem till eleven. Även Vygotskij fokuserar på lärarens ansvar för att utmana eleverna inom deras proximala utvecklingszoner (ZPD) och detta läraransvar benämns stöttning (Bruner, 1960, 1968). För att elevens individuellt konstruerade kunskaper skall bli socialt och kulturellt accepterade fokuseras i Vygotskijs teori emellertid mera elevernas möjligheter att kommunicera och interagera än lärarens direkta intervention. Enligt Brousseau behöver läraren aktivt korrigera elevernas felaktiga

lösningar så att inte dessa kommer att utgöra hinder för fortsatt kunskapsutveckling. För flerspråkiga elever betraktas lärarens stöttning och ansvar för att utforma undervisningsmiljöer med inslag av kommunikation och interaktion som en särskilt viktig förutsättning för möjligheterna att utveckla det matematiska kunnandet (Brousseau, 1997; Bruner, 1960, 1985; Cummins, 1984; Gibbons, 2002; Vygotskij, 1926/1997, 1986, 1997). För att i undervisningsmodellen indikera de teoretiska utgångspunkterna för denna dimension av läraransvar krävdes observerade variabler som karakteriserar att läraren aktivt och öppet stödjer eleverna genom att exempelvis lyfta fram och förklara det matematiska innehållet, informera sig om deras kunskaper och tidigare erfarenheter och organisera undervisning som skapar förutsättningar för både problemlösning och social interaktion. TIMSS-data erbjöd observerade variabler som direkt indikerade dessa kriterier och resultaten av analyserna visade stabila positiva samband mellan prestationer och undervisning som präglas av att läraren tar ansvar för elevernas lärprocesser i stället för eleverna. De signifikanta korrelationerna kvarstod även efter kontroll för inflytande från både SES och elevernas språkliga kompetenser vilket kan innebära att det positiva sambandet representerar ett kausalt samband. Detta resultat var också i överensstämmelse med de teoretiska utgångspunkterna och det förväntade resultatet.

Studiens resultat stödjer således Brousseaus teoretiska antaganden att det är framgångsrikt för elevernas kunskapsutveckling om undervisningen institutionaliseras. Om matematikundervisningen istället präglas av ett stort elevansvar, så som svensk matematikundervisning gjort under senare decennier, försvåras elevernas möjligheter att utveckla sitt kunnande. Elevernas matematikkunskaper kan även komma att förbli individuella och inte socialt och kulturellt accepterade, vilket är en förutsättning för att de skall vara användbara i situationer utanför skolkontexten. Elevernas egna aktiviteter visade inte samma tydliga positiva effekt på prestationerna som den mer direkta lärarinterventionen. Indikatorer med bättre precision och som även beskriver social interaktion på ett tydligare sätt skulle eventuellt ha gett ett annat resultat. Att Brousseau inte lika tydligt som Vygotskij problematiserar sociala aktiviteters betydelse för institutionalisering av elevernas kunskaper måste i relation till flerspråkiga elevers behov av kommunikation och språkutveckling betraktas som en brist. I en uppföljning av resultaten från denna studie skulle därför den sociala och språkliga dimensionen av matematikundervisningen behöva belysas mer ingående. De inslag i Brousseaus teori som bygger på att eleverna betraktas som autonoma i lärprocessen och att syftet med kunskapsutvecklingen är att eleverna skall bli autonoma människor i samhället står till viss del i strid med både flerspråkig elevers behov och samhällets.

Det finns tydligare teoretiska utgångspunkter hos Vygotskij som ger stöd för flerspråkiga elevers behov av kommunikation och social interaktion för sin kunskapsutveckling av både språk och matematik, och för samhällets behov av personer som kan samverka och inte bara individuellt lösa problem.

Den tredje dimensionen av undervisningsansvaret som speglar lärarens ansvar för att lyfta fram det matematiska innehållet som objekt för undervisningen uppvisade det mest överraskande resultatet genom att i de fåtal analyser denna dimension över huvud taget var signifikant relaterad till prestationsnivåerna var sambandet negativt. Dessa negativa samband framträdde efter kontroll för klassens språkkompetens, men inte efter kontroll för SES-nivå. Sammantaget har det givetvis ingen rimlig innebörd i relation till avsikten med analysen att prestationerna skulle försämrats om det matematiska innehållet är i fokus på lektionerna, utan resultatet speglar i stället någon annan relation i matematikundervisningen. En tänkbar orsak till detta skulle kunna vara brist på lämpliga variabler i TIMSS-data där det endast finns ett begränsat urval av observerade variabler att välja som indikatorer på ett matematikinnehåll som är representativt för årskursen. Någon eller några av dessa variabler kan av de elever som svarat på enkäten möjligen ha tolkats som mer grundläggande basfärdigheter i matematik än som generellt representativa för matematikkursen i årskurs 8. Ett exempel på detta är uppgiften om hur ofta de övar de fyra räknesätten utan att använda miniräknare. Det skulle också kunna vara så att elever i särskilda undervisningsgrupper, där många är i behov av stöd, mer än andra elever gjorts uppmärksamma på innehållet i undervisningen. Den negativa korrelationen till prestationsnivåerna efter kontroll för språkbakgrund antyder således att den tredje dimensionen kan uppvisa effekter av nivågrupperad undervisning i stället för effekter av matematikundervisning. Det kan alltså finnas interaktionseffekter med andra bakgrundsfaktorer inblandade, exempelvis differentiering inom skolorna vid nivågruppering eller särskilda stödåtgärder (Skolverket, 2009b). För att motverka dessa interaktionseffekter finns det olika åtgärder att vidta, men av metodologiska och datamässiga skäl har inte dessa varit möjliga i denna studie. För att kontrollera för nivågruppering hade exempelvis skolnivån behövt adderas till modellen eller så kunde en kontrollvariabel med elevernas förkunskaper ha införts. Ytterligare en möjlighet att fånga den innehållsliga dimensionen i undervisningen hade varit genom tillgång till andra observerade variabler.

En av de teoretiska utgångspunkterna som legat till grund för modellen för undervisningsansvar har varit att elevens aktivitet är en förutsättning för lärandet. För både Vygotskij och Brousseau är detta en central utgångspunkt även om de skiljer sig åt i vissa avseenden. Vygotskij betonar de sociala faktorerna i ele-

vens aktivitet där kommunikation, språk och interaktion är centrala medierande faktorer, medan Brousseau mer betonar betydelsen av adidaktiska situationer som är anpassade till elevens förkunskaper och stimulerar deras egen aktivitet och problemlösning. Teorierna kompletterar på det sättet varandra. Resultaten visar visserligen positiva effekter av elevernas egna aktiviteter, men dessa är relaterade till klassens SES-nivå. Den typ av eget elevarbete som utmärks av att en lärare tagit ansvar för att skapa förutsättningar för exempelvis sociala aktiviteter eller adidaktiska situationer visar sig vara relaterade till klasser med hög SES-nivå. Det har i den här studien emellertid inte kunnat avgöras om den positiva effekten kan hänföras till elevaktiviteterna som sådana eller från dessa elevers allmänt bättre studieförutsättningar. Oavsett detta utgör resultaten en grund för att formulera nya frågeställningar. Skiljer sig karaktären av elevers eget arbete mellan olika gruppkonstellationer, tar läraren mer ansvar för elevers eget arbete i vissa grupper än i andra? Med tanke på utvecklingen under de senaste decennierna mot allt mer eget arbete i matematikundervisningen samtidigt med en ökad skolsegregation och allt fler elever med svagt utvecklade språkkompetenser är detta en fråga av stort intresse. Om elever som är i stort behov av sociala aktiviteter för att genom samtal och interaktion utveckla både språk- och matematikkompetens, eller om elever som är i behov av utmanande matematiska problem som är väl avvägda mot deras förkunskaper och tidigare erfarenheter, mer sällan än andra möter eget arbete som svarar upp mot deras individuella förutsättningar är det ett problem. Ett problem som inom matematikundervisningen kan leda till sämre resultat, men även till ökade klyfter mellan olika elevgrupper.

Ett annat antagande har varit att lärarens mer direkta stöttning av elevens lärprocess är en viktig förutsättning för kunskapsutveckling. Antagandet bygger på Vygotskijs teori om lärarens ansvar att stödja barnets utveckling inom dess proximala utvecklingszon samt både Vygotskijs och Brousseaus teorier om lärarens ansvar för att eleven får ett externt perspektiv på sin individuella kunskap, vilket är en förutsättning för att den skall bli användbar utanför skolkontexten. Även i detta sammanhang är Brousseau mer inriktad på direkt lärarintervention och didaktiska strukturer än på sociala aktiviteter. Resultaten i den här avhandlingen ger stöd för detta antagande, ty de visar ett positivt samband mellan klassernas prestationsnivåer och undervisning som präglas av lärarens aktiva stöttning av eleverna. Denna dimension av ansvaret visade sig dessutom vara starkare relaterad till de mer språkligt och kognitivt präglade testuppgifterna vilket indikerar att ansvaret har särskilt stor betydelse för att eleverna skall klara mer utmanande matematikproblem, men också för att de elever som är i behov av språklig stöttning skall ha bättre förutsättningar till kunskapsutveckling. Resultaten visar

således att lärarens ansvar för elevernas lärprocesser är av särskilt stor betydelse i undervisningsgrupper med elever med stora behov av exempelvis social interaktion, språkutveckling och individuellt utmanande problem. I nästa avsnitt diskuteras jag emellertid resultat som tvärt emot detta visar att ju fler elever i klassen som kan förväntas ha dessa behov, desto troligare att matematikundervisningen inte präglas av läraransvar. Speglat mot den ökande skolsegregationen, det fria skolvalet och stigande andel elever i behov av stöd för sin språkutveckling indikerar dessa resultat ett allvarligt problem inom matematikutbildningen. För stora grupper av elever kan det innebära att matematikkunskaperna inte institutionaliseras, vilket förutom brister i kunskapsutveckling också kan leda till att dessa elever får problem då de skall använda sina matematikkunskaper utanför skolkontexten.

Olika dimensioner av undervisningsansvar finns inbäddade i alla former av organiserat matematiklärande och i delstudie I visas exempelvis att i såväl lärarsom elevcentrerad undervisning kan det finnas olika grad av läraransvar för elevernas lärprocesser. Att ta ansvar för elevers lärande kan därför inte betraktas som en metod eller en organisationsform för att genomföra matematikundervisning, utan snarare en aspekt av undervisning som genomsyrar olika metoder och organisationsformer. Det sätt att organisera matematikundervisning som varit dominerande efter införandet av Lpo94, så kallat eget arbete (Vinterek, 2006), skulle med nödvändighet inte behöva karaktäriseras av lite läraransvar för elevers lärande. Tvärtom skulle elevernas eget arbete kunna baseras på teoretiska utgångspunkter om betydelsen av att de själva konstruerar sitt kunnande (Brousseau, 1997; Vygotskij, 1997), men fortfarande ha betydande inslag av läraransvar. Så som eget arbete kommit att utvecklas i matematikundervisningen strider det emellertid mot den bärande idén i både Vygotskijs och Brousseaus teorier om lärarens stora ansvar för att stödja elevernas kunskapsutveckling. Österlind (1998) visar i sin studie att förutom att eget arbete utmärks av att det är organiserat kring den enskilde eleven och inte kring kollektivet, samt av att eleverna tar ett stort eget ansvar, så har det också kommit att utmärkas av att eleverna själva får planera sina studier. Enligt Brousseaus teori om didaktiska situationer är det emellertid väsentligt att läraren tar detta ansvar för att planera och skapa nödvändiga lärsituationer och stötta eleverna i deras lärprocesser om eget arbete skall komma att karaktäriseras av adidaktiska situationer där eleven tar ansvar för att konstruera sin egen kunskap, medan det överordnade ansvaret helt och fullt ligger på läraren. Att läraren tar ansvar för att den individuellt konstruerade kunskapen situeras i skolkontexten är också en förutsättning för att

den görs socialt och kulturellt kommunicerbar, vilket inte garanteras om eget arbete utmärks av ett stort elevansvar för lärprocessen.

Den förskjutning av ansvaret för elevernas utbildning som skett nedåt i utbildningssystemet har inneburit att lärarens ansvar mer och mer kommit att handla om sådana utbildningsfrågor som tidigare legat på beslutsnivåer högre upp i systemet, och mindre om elevernas lärande (Dovermark, 2004). För att möjliggöra det läraransvar för elevernas matematiklärande som diskuterats ovan krävs att lärarna får förutsättningar för detta, både vad gäller kunskaper men också i form av tid. Eventuellt innebär det att annat ansvar för undervisningens villkor lyfts till beslutsnivåer ovanför klassrummet. Det är genom en sådan ordning som ett samhälle kan sträva efter en jämlik utbildning enligt Nussbaums (2000) teori.

Pedagogisk segregation

Som jag tidigare diskuterat är det viktigt att inte analysera individuella och kontextuella förklaringsfaktorer var för sig, vilket tidigare varit vanligt inom effektstudier (Dumay & Dupriez, 2007). Om syftet är att visa hur undervisning kan göra skillnad för elever från mindre stödjande hemförhållanden, eller med svaga kunskaper i undervisningsspråket, kan man missbedöma undervisningseffekterna om man styr bort analyserna från individuella bakgrundsfaktorer, ty både undervisningen och dess effekter är ofta påverkade av klassernas SES-nivåer och elevernas språkliga förutsättningar. I den här avhandlingen har jag använt en analysdesign som visar hur mycket av variationen i klassernas prestationsnivåer som beror på matematikundervisningen respektive de individuella bakgrundsfaktorerna och detta ökar möjligheterna att påvisa kausala samband mellan undervisning och prestationer. För att avgöra om matematikundervisning är likvärdig räcker det emellertid inte att känna till vilken undervisning som har positiva effekter på elevernas kunskapsbildning, det är också viktigt att veta om alla elever får tillgång till sådan undervisning, oberoende av gruppsammansättningen i den klass de går. Detta har motiverat att även belysa sambandet mellan matematikundervisningens utformning och gruppernas sammansättning.

Genom att använda flernivå strukturell ekvationsmodellering som analysmetod har jag kunnat analysera samvariationen mellan gruppsammansättning och undervisningens utformning samtidigt som jag analyserat effekter av både undervisningsansvar och individuella bakgrundsfaktorer. Dessa analyser visade att hur lärarna tar ansvar för matematikundervisningen till stor del beror på gruppsammansättningen i klassen. Ju högre andel elever med svagt utvecklade språkkompetenser i en klass desto troligare att eleverna själva får ta ett stort ansvar för sitt matematiklärande (korrelation, -0.6). Det samma gäller för grupp-

sammansättningar med avseende på SES-nivå, ju högre andel elever från familjer med låg socioekonomisk status i en klass desto troligare är det att eleverna själva fick ta ett stort ansvar för sin läroprocess i matematik (korrelation, 0.5). Att läraren ansvarar för att möjliggöra kommunikation och interaktion samt vägledning av eleverna i deras processer mot mer komplexa strukturer av kunskande är alltså vanligast i klasser där en stor del av eleverna har goda språkkompetenser och kommer från hem med hög SES-nivå. Om man inte beaktar förekomst av pedagogisk segregation skulle sammansättningseffekter, vilket visar att gruppammansättningen påverkar prestationsnivåerna, helt kunna hänföras till individuella förklaringsfaktorer som exempelvis elevernas svaga förkunskaper och bristande stöd från hemmen. Det är emellertid viktigt att beakta att sammansättningseffekter även kan medieras via undervisningen vilket är visat i den här studien och vilket även stöds av tidigare forskning (Dumay & Dupriez, 2007; Garrison, 2004; Opdenakker, et al., 2007; Thrupp, 1999; Weinert, et al., 1989).

När jag ovan diskuterade effekter av olika dimensioner av ansvar för elevers lärande reste jag frågan om karaktären av elevers eget arbete skiljer sig mellan olika gruppkonstellationer, om lärare tar mer ansvar för detta i vissa grupper än i andra. Resultaten styrker att så kan vara fallet. Eget arbete i betydelsen adidaktiska situationer, som enligt Brousseau innebär att eleven ansvarar för att konstruera sin egen kunskap medan det överordnade ansvaret att skapa dessa situationer och stötta eleverna helt och fullt ligger på läraren, kan därför vara vanligare i klasser där eleverna kommer från hem med hög socioekonomisk status och där få elever har språksvårigheter. Eget arbete i klasser med andra gruppammansättningar kan i stället vara präglad av att eleverna tar huvudansvaret för stora delar av läroprocessen. Detta medför förutom sämre förutsättningar att lära matematik också att institutionalisering i betydelsen att göra kunskapen generell och kommunicerbar försvåras i de senare klasserna. Mot bakgrund av de samhällsförändringar som skett i Sverige under de senaste decennierna kan det därför ifrågasättas om eleverna erbjuds en likvärdig matematikundervisning, vilket är en förutsättning för att den skall bidra till att minska prestationsgapet mellan olika elevgrupper.

Undervisningens motkraft till negativt inflytande från individuella bakgrundsfaktorer minskar om den inte anpassas till elevers och gruppernas förutsättningar och behov. Om undervisningen däremot anpassas till olika behov kan den kallas likvärdig, enligt Wallin (2002). Resultaten i den här avhandlingen visar att matematikundervisningen brister i att erbjuda dessa likvärdiga förutsättningar och således förekomma pedagogisk segregation i den svenska matematikutbildningen. Undervisningsgrupper med stort behov av stöd erbjuds mindre

stödande förutsättningar än andra grupper. Exempelvis skulle undervisningen behöva organiseras kring kommunikation och sociala aktiviteter (Bruner, 1960; Wood, et al., 1976; Vygotskij, 1926/1997) för att elever med svaga språkkompetenser skall få möjlighet att både utveckla sina språk och lära matematik (Bruner, 2002; Cummins, 1984; Long, 1985; Setati & Adler, 2000; Vygotskij, 1986). Dessa elevers matematiklärande stöds också genom att de får använda alla sina språk i kognitivt och språkligt utmanande situationer (Barwell, 2003; Gibbons, 2006). För dessa elever och även för de med bristande förkunskaper är det också viktigt att ord och begrepp förklaras (Elmeroth, 2006; Jamieson, et al., 2004) och att eleverna vägleds inom sina individuella utvecklingszoner (Cummins, 1984; Gibbons, 2002; Vygotskij, 1978). Exempelvis kan denna vägledning ske genom att det skapas adidaktiska situationer som är utmanande men anpassade till elevernas förutsättningar (Brousseau, 1997).

I den moralfilosofiska teori om rättvisa, ”The capabilities approach”, som utvecklats av Nussbaum (2000) betonas att det är vad människor kan göra, vad de har förmåga till, som beskriver graden av rättvisa i ett samhälle. Enligt Nussbaum kan skolan genom sin undervisning om baskunskaper i exempelvis matematik spela en viktig roll för elevens möjligheter att utveckla sin kognitiva förmåga och därigenom bli kapabla att agera i olika sammanhang i livet. Ansvaret för elevernas möjligheter att utveckla denna förmåga kan då inte läggas på den enskilde individen, snarare måste ansvaret komma uppifrån via samhällets styrfunktioner. Genom en sådan ordning kan ett samhälle enligt Nussbaum sträva efter rättvisa. Denna teori överensstämmer väl med det Vygotskij och Brousseau lyfter fram i sina teorier om betydelsen av att lärare tar ett övergripande ansvar och stöttar eleverna i deras lärprocesser, samt att elevernas individuella kunskaper socialiseras och görs användbara i kontexter utanför skolan. Dock betonas detta mer explicit av Brousseau än av Vygotskij genom begreppet institutionalisering och syftet att eleven skall kunna bli en autonom samhällsmedborgare. Det som den här avhandlingen har visat, att de elever som har ett särskilt stort behov av stöd för sin kunskapsutveckling i matematik samtidigt har givits ett relativt större ansvar för sitt eget matematiklärande än andra elever, kan sägas stå i strid med Nussbaums syn på rättvisa.

Trots att elever med utländsk bakgrund ofta har högre studieambitioner än sina kamrater med svensk bakgrund (Elmeroth, 2006; Rendon, 1999) så når de inte motsvarande studieresultat, någonting hindrar dem från att förverkliga sina visioner och målsättningar. Den pedagogiska segregationen inom matematikundervisning skulle kunna utgöra ett sådant hinder. Vilka mekanismer som ligger bakom pedagogisk segregation är inte analyserat i den här avhandlingen,

men tänkbara orsaker är att lärare inte har tillgång till resurser eller kunskaper att hantera språk- och SES-problematiken. I en studie av Baumert et al. (2010) är det visat att lärarens matematikdidaktiska kompetens är en central och avgörande faktor för undervisningens kvalitet. Konsekvenserna av bristande resurser och kompetenser kan dessutom accentueras genom skolsegregationen som koncentrerar problematiken till vissa skolor och klasser. Sociala omständigheter i klassen är en annan tänkbar mekanism bakom pedagogisk segregation liksom lärares förväntningar på elevernas intressen och förmågor. Skolsegregation kan också tänkas påverka rekryteringen av kompetenta lärare och på så sätt orsaka pedagogisk segregation. En ytterligare förklaring är lärobokens dominans i undervisningen vilket kan stimulera till självstudier i vissa klasser. Slutligen kan också det ökade ansvaret som är lagt på lärarna för administrativa uppgifter ha resulterat i mindre tid och kraft att ta ansvar för elevernas matematiklärande. Alla dessa mekanismer som kan tänkas förklara att undervisningen i vissa klasser utmärks av ett stort elevansvar för lärprocessen är också att betrakta som förklaring till den höga korrelationen mellan faktorerna i undervisningsmodellen. Om en av dimensionerna utmärks av en låg grad av läraransvar kan man alltså förvänta sig att även de andra dimensionerna gör det. Att vidare undersöka vilka mekanismer som påverkar lärare att bryta den starka traditionen av stort elevansvar är nödvändigt för att skapa underlag för förändring mot ökad likvärdighet i den svenska matematikundervisningen.

Bakgrunds- och förklaringsfaktorers specifika relevans för matematikundervisning

I detta avsnitt diskuterar jag om genomslaget av läraransvar för elevers lärande är olika för matematik och andra skolämnen. Dessutom diskuterar jag hur effekter av undervisningsansvar påverkas av differentierad undervisning, skolsegregation och stor andel flerspråkiga elever i undervisningsgrupperna, samt hur denna påverkan skiljer sig mellan matematik och andra skolämnen.

Att en förskjutning har skett mot allt mer elevansvar för stora delar av elevernas lärprocesser har jag tidigare diskuterat. Ett exempel på detta är att i den organisation av skolarbetet som kallas eget arbete har elevernas ansvar inte endast begränsats till deras egen konstruktion av kunskap, utan omfattar även stora delar av hela lärprocessen (Skolverket, 2009b; Vinterek, 2006; Österlind, 1998). Effekterna av detta ökade elevansvar har i den här avhandlingen visats vara negativa för matematikprestationerna. Det finns anledning anta att det är vanligare i matematikundervisningen än i andra ämnen att eleverna själva får ta ett stort ansvar för sitt lärande. Att matematikämnet ofta karaktäriseras av rätt eller fel i stället för nyanserade avvägningar kan ha inneburit att uppgifter och problem

sällan utformats som underlag för dialog och egen prövning av olika ställningstaganden. I stället har matematikundervisning mer än andra ämnen kommit att präglas av färdighetsträning och proceduriellt inriktade övningar där läraransvaret kunnat tonas ner till förmån för elevernas eget ansvar (Skolinspektionen, 2009). Ämnets karaktär kan också ha bidragit till att enkla regler och metoder i stället för förståelse stått i centrum. Även traditionen att mäta kunskaper relaterade till innehållsliga mål i stället för kompetensmål kan vara en konsekvens av ämnets karaktär. Detta kan även tänkas ha stimulerat elevernas lust att ”tävla” om vem som räknat mest vilket inneburit att matematikövningarna blivit till lopp med självgående elever. Förutsättningarna är således stora i matematikundervisningen, förmodligen större än i andra skolämnen, att lämna över en stor del av ansvaret för lärandet till eleverna själva då de på egen hand kan ”bocka av uppgifter” utan påtagligt behov av lärares planering, handledning eller återkoppling. Som en konsekvens av dessa resonemang har läroboken kommit att få en central roll i matematikundervisningen, vilket exempelvis framkommer i den nämnda kvalitetsgranskningen av Skolinspektionen och i Johanssons (2006) studie. Läroboksstyrningen innebär förutom att undervisningen inriktas mot mer proceduriellt innehåll också ökat elevansvar för hela lärprocessen, med självständigt elevarbete och minskat läraransvar som följd. Inte minst den omständigheten att läromedel oftast omfattar facit till uppgifterna stimulerar till självständigt elevarbete.

Internationella jämförelser av matematikundervisningens utformning har visat en stor överensstämmelse mellan olika länder (Hiebert, et al., 2003). Läraren förklarar procedurer och ger anvisningar och det förekommer inte mycket interaktion eller resonemang utan i stället lyssnar eleverna och ägnar tid åt proceduriellt inriktad färdighetsträning (Hiebert, et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1997). Undervisningspraktiker som avviker från huvudfåran, exempelvis den japanska, präglas av mer lärarledd gemensam genomgång av nytt matematiskt innehåll samt av mer självständigt arbete med problemlösning. I den västerländskt präglade undervisningen betraktas matematikämnet ofta som ett verktyg för tekniska framsteg, betydelsefullt för samhällets utveckling snarare än för elevens utveckling till kritisk samhällsmedborgare (Jablonka, 2003). Procedurer och färdigheter som ligger till grund för att använda matematiken som ett sådant verktyg har därför behövt befästas. Grundläggande idéer i den konstruktivistiska lärovetenskapen, vilken dominerat skolundervisningen det senaste halvsekle, kan härigenom ha kommit att misstolkas i matematik. I stället för att elevens självständiga arbete och konstruktion av kunskap betraktas som en förutsättning för utveckling av mer komplexa strukturer av matematiskt kunnande, har det kommit

att präglas av memorering och befästande av procedurer och färdigheter. Att låta eleverna ta ansvar för hela lärprocessen, och inte endast den del som handlar om att lära sig själv, har därigenom blivit tämligen okomplicerat. Undervisningen i matematik har därför lättare än för många andra skolämnen kunnat anpassas till de individualiseringstrender och ansvarsförskjutningar som genomströmat utbildningssystemet. Detta skulle kunna vara orsak till att ökat elevansvar oftare förekommer i matematikundervisning än i andra ämnen.

Förutom att ett stort elevansvar är mer frekvent i matematik än i andra skolämnen finns det anledning diskutera om de negativa effekterna av detta elevansvar också kan ha större genomslag för matematik än för andra ämnen. Matematikämnets abstrakta karaktär och den omständighet att barnen huvudsakligen lär sig ämnet i skolkontexten och inte utanför denna kan vara exempel på förutsättningar som förstärker den negativa effekten av ett stort elevansvar. Att möta dessa förutsättningar genom att erbjuda situationer som eleverna upplever fria från didaktiska intentioner, där de motiveras att ge sig hän åt problemlösning och där de inte endast lär för skolans utan även för sin egen skull, försvåras om inte läraren tar ett stort ansvar för elevernas matematiklärande. Liknande situationer motsvaras av de didaktiska situationer som beskrivs i Brousseaus teori vilka förutsätter att en lärare tar ansvar för planering, organisation och stöttning av eleverna. De negativa effekterna i andra skolämnen av ett svagt läraransvar kan tänkas bli mindre eftersom elevernas möjligheter att själva relatera till vardagserfarenheter kan vara större i dessa ämnen. Även deras möjligheter att lära ämnet i sammanhang utanför skolan kan vara större än de är för matematik. Betydelsen av att läraren tar ansvar för att skapa en länk mellan skolämnet och elevens erfarenhetsvärld kan därför vara större i matematik än för andra ämnen. Kunskapen behöver verklighetsförankras genom att anpassas till förhållanden som eleven känner igen och detta kallas i Brousseaus teori om didaktiska situationer för att läraren rekontextualiserar den abstrakta teoretiska kunskapen på ett sätt som härrör från det matematiska kunskapsobjektets inneboende egenskaper och gör detta begripligt för eleverna. Brousseau uttrycker detta på följande sätt:

...she [the teacher] must produce a recontextualization and a repersonalization of the knowledge. It must become the student's knowledge, that is to say, a fairly natural response to relatively particular conditions, conditions that are essential if she is to make sense of this knowledge. (Brousseau, 1997, s. 23)

Läraren skall också ta ansvar för att eleven i sin tur betraktar den kunskap hon har konstruerat ur ett generellt perspektiv, alltså inte endast i den kontextualiserade formen, detta för att elevens kunskap inte endast skall vara personlig utan kommunicerbar i sammanhang utanför skolan där hon kan komma att behöva

använda den. Med utgångspunkt i teoretiska antaganden om betydelsen av att eleverna får handledning och stöttning från en mer erfaren person i sin kunskapsutveckling (Brousseau, 1997; Bruner, 1960; Wood, et al., 1976; Vygotskij, 1926/1997, 1997) kan lärarens ansvar i undervisningsprocessen betraktas som stort i alla skolämnen, men som jag diskuterat ovan finns det mycket som pekar mot att det har en särskilt stor betydelse just för matematikundervisningen.

Till sist diskuterar jag hur de olika samhälls- och skolförändringar som presenterades i bakgrundskapitlet förhåller sig till ansvarsfrågan och matematikundervisningen. Förändringen av den allmänna skolan mot allt mer sammanhållen undervisning har exempelvis inte avspeglats lika tydligt i matematikundervisningen som i andra skolämnen (Lindensjö & Lundgren, 2002), utan differentiering i olika former har där levt kvar. Även efter införandet av Lpo94 har nivågrupperad matematikundervisning funnits kvar inom skolorna. Det är därför intressant att problematisera på vilket sätt förskjutningen mot ett ökat elevansvar för stora delar av kunskapsprocessen samvarierar med differentierade undervisningsgrupper och likaså om denna samvariation skiljer sig mellan undervisning i matematik och andra ämnen. Att differentiering i olika former länge levt kvar i matematik har givetvis många orsaker. Exempelvis har ämnet historiskt haft karaktären att mäta kognitiva förmågor eftersom matematisk begåvning till stor del betraktats som medfödd. Differentiering av eleverna efter prestationsgrad har därför setts som en anpassning till dessa förmågor. Synen på ämnet har också präglats av att det är något man härmar och memorerar snarare än något man själv skapar. Detta kan ha lett till att differentiering blivit ett medel i en instrumentell syn på individualisering och stöd för elever med problem att lära matematik. Sammantaget kan differentieringen troligen ha stimulerat till att förmedla matematikkunskaperna till eleverna i stället för att de själv har fått konstruera dem. Lärarens ansvar för elevernas lärprocesser begränsas med sådan undervisning till att beskriva det matematiska innehållet, inte till att stimulera samtal, sociala aktiviteter och elevens egen konstruktion av sin kunskap. En motsatt trend till denna differentiering av matematikundervisningen har de åldersblandade klasserna utgjort, men även dessa har gett upphov till en förskjutning av ansvaret för elevernas kunskapsprocesser från läraren till eleverna (Österlind, 1998). Förskjutningen har i många fall inneburit att de brister på undervisningsansvar som kommer till uttryck i differentierad undervisning kvarstått med den skillnaden att eleverna inte heller fått lärargenomgångar av det matematiska stoffet. Parallellt med dessa åldersblandade klasser har nivågrupperad undervisning fortsatt att finnas som ett sätt att individualisera undervisningen. Lärares lägre förväntningar på lågpresterande elever i nivåindelade grupper kan ha inneburit att de avstått

från att utmana eleverna med exempelvis problemlösning, matematiska samtal och argumentation. Hastighetsindividualisering med fokus på färdighetsträning och procedurrella kunskaper kan i stället ha blivit en dominerande undervisningsform med fokus på elevens eget ansvar för stora delar av kunskapsprocessen. Kan de negativa effekterna som påvisats av ökat elevansvar förstärkas i nivåindelade undervisningsgrupper? Det är troligt eftersom elever behöver stöttning av en mer erfaren person för sin kunskapsutveckling och i grupper med dominans av elever i behov av stöd kan det vara svårt att hitta en stödjande kamrat om lärarens ansvar begränsas till att gå runt och hjälpa enskilda elever i stället för att ha samlad undervisning. I grupper med dominans av högpresterande elever uppstår inte motsvarande problematik och dessutom visar resultaten att undervisningen i dessa grupper mer sällan än i grupper med behov av stöd präglas av stort elevansvar. Eftersom både nivågruppering och ett stort elevansvar troligen är vanligare i matematik än i andra ämnen kan de negativa effekterna därför vara särskilt stora för ämnet matematik. En annan fråga att diskutera är om de negativa effekterna som påvisats av ökat elevansvar förstärks för elever med svagt utvecklade språkkompetenser? Att det förhåller sig så är troligt ty resultat i den här studien ger stöd för det teoretiskt grundade antagandet att lärarens stöttning av lärprocessen är särskilt viktig för flerspråkiga elevers möjligheter att lära matematik.

Då samhällsutvecklingen de senaste decennierna gått mot ökad skolsegregation har grupsammansättningarna blivit allt mer homogena med avseende på språkkompetens och sociala faktorer. Elever med svagt utvecklade kompetenser i undervisningsspråket går följaktligen allt oftare i klasser där en stor del av kamraterna uppvisar liknande förkunskaper och erfarenheter. Vad min studie visar är att dessa grupper dessutom mer sällan än andra får matematikundervisning som präglas av att läraren tar ansvar för planering och stöttning av elevernas lärprocesser med alla konsekvenser detta har för deras möjligheter att utveckla sina språk- och matematikkunskaper. Då skolsegregationen leder till elevgrupperingar som är mer beroende än andra av lärarens stöttning och om undervisningen samtidigt inte möter dessa gruppers behov har det i den här avhandlingen kallats pedagogisk segregation. Mot bakgrund av de resonemang jag har fört ovan om betydelsen av läraransvar i matematikundervisningen, och då i synnerhet för elever med svagt utvecklade språkkompetenser, kan pedagogisk segregation betraktas som ett stort hinder för elevers möjligheter att utveckla sina matematikkunskaper. I de homogena grupperingarna, orsakade av antingen nivågruppering eller skolsegregation, kan elever som är i extra stort behov av stöttning inte heller förväntas skaffa stöd från kamrater på samma sätt som i heterogena klasser och

är därför extra beroende av lärarens stöttning. Skolsegregation kan därför betraktas som extra belastande för elevers möjlighet att klara just matematikstudierna.

Sammanfattningsvis konstaterar jag att mycket talar för att det finns en för matematikämnet unik relation mellan ökat elevansvar för stora delar av läroprocessen och elevernas kunskapsutveckling. Även om ett minskat läraransvar i undervisningen generellt är problematiskt, så är de negativa konsekvenserna troligtvis än mer framträdande för matematikämnet. Av allt att döma präglas dessutom matematikämnet mer än övriga skolämnen av ett ökat elevansvar. I kombination med andra faktorer, exempelvis differentierad undervisning, skolsegregation och elevers svaga språkkompetenser, kan både omfattning och negativa effekter av ett minskat läraransvar förstärkas än mer. Framför allt drabbas elever med särskilt stora behov av lärarstöd. Att dessa elever mer sällan än i andra får matematikundervisning som präglas av läraransvar är därför synnerligen bekymmersamt.

Metodfrågor och validitet

Modeller av olika bakgrunds- eller förklaringsfaktorer till elevers och grupper matematikprestationer har utvecklats med utgångspunkt i teorier som tidigare presenterats. När dessa faktorer sedan använts för att analysera samband och orsaker till variationen i prestationerna är det emellertid inte effekter av processer och aktiviteter som analyserats, utan effekter av olika förutsättningar för att möjliggöra dessa processer och aktiviteter. Den övergripande strategin i analyserna av resultaten har sedan varit att åberopa statistiska metoder för att utvärdera olika teoretiska antaganden. Mätmodellen för undervisningsansvar visade sig vara teoretiskt tolkningsbar då den validitetstestades gentemot data från TIMSS 2003, matematik årskurs 8. Även sambandet mellan undervisningsansvar och prestationer samt samvariationen mellan gruppammansättning och undervisningens utformning visade sig vara både statistiskt signifikanta och tolkningsbara.

I delstudie I var resultaten i linje med hypotesen att det för elevernas möjligheter att utveckla sitt matematiska kunnande är betydelsefullt att ansvaret för lärandet är riktat mot läraren och inte mot eleverna och att undervisningsansvaret är tredimensionellt. Tvånivå konfirmatorisk faktoranalys, som användes vid utvecklingen av mätmodellen för undervisningsansvar, visade sig vara ett användbart verktyg, ty modellens överensstämmelse med data från TIMSS 2003 var god vilket också stödjer det lämpliga i att använda modellen för att beskriva och analysera matematikundervisning. Som tidigare diskuterats är denna metod särskilt lämplig när analyserna har hierarkisk struktur vilket innebär att elever definierar den ena nivån av observationerna och klasser definierar den högre ni-

vån. Emellertid skulle modellenpassningen på gruppnivå förmodligen blivit bättre med andra observerade variabler för att indikera dimensionerna. Eftersom syftet med delstudie I var att också empiriskt testa den utvecklade modell för undervisningsansvaret behövdes ett stort representativt urval och TIMSS-data 2003 motsvarade det kravet. Att använda storskalig data innebär dock att man är tvungen att kompromissa med kravet på tillgång till data som på ett optimalt sätt indikerar den teoretiskt konstruerade latent variabeln, i det här fallet undervisningsansvar. I delstudie I behövdes observerade variabler som återspeglade hur undervisningen genomfördes och då främst hur lärare och elever tog ansvar för de olika aspekterna av undervisningen. Genom enkätsvar har man i TIMSS-data tillgång till uppgifter om hur elever respektive lärare uppfattar att undervisningen genomförs. Det finns två problem förknippade med dessa data där det första handlar om brist på variabler för att på ett valitt sätt indikera undervisningsansvaret och det andra handlar om validiteten i de svar som är givna på enkätfrågorna. Å ena sidan kan elever ha svårt att ta ett metaperspektiv på undervisning samt att värdera olika undervisningsföreteelser, varför elevsvaren när de aggregeras till gruppnivå inte alltid har kapacitet att beskriva undervisning. Lärarsvaren som mera återger undervisningsnivån skulle å andra sidan kunna brista i validitet om lärarna svarar ”politiskt korrekt” i stället för att återge den praktik som verkligen råder i klassrummet.

Validiteten i de teoretiskt konstruerade dimensionerna bekräftas av att laddningarna till de variabler som valts som indikatorer uppvisade både höga och signifikanta skattningar, se figur 7. Det visade sig alltså vara möjligt att finna grupper av variabler i TIMSS-data som gemensamt indikerade var och en av de tre dimensionerna av undervisningsansvaret. Till den tredje dimensionen, matematikinnehållet, var det emellertid inte möjligt att finna variabler på gruppnivå vilka hade denna egenskap och detta har i sin tur kunnat bidra till minskad validitet för denna dimension.

I delstudie II som genomfördes med flergrupps konfirmatorisk faktoranalys i en nivå var resultaten delvis i linje med hypotesen att innebörd, struktur och effekt av SES varierar mellan olika elevgrupper, beroende på vilken migrationsbakgrund eleverna har och att denna variation även påverkar validiteten i SES då det mäts i heterogena undervisningsgrupper. SES visade sig ha samma innebörd för de olika elevgrupperna samt samma relation till prestationerna. Vad som skiljde grupperna åt, vilket även påverkade validiteten i SES, var nivåerna på två av indikatorerna som användes. Analysen visade slutligen att med dagens tillgängliga metoder och data från storskaliga studierna är det inte möjligt att öka validiteten i ett skattat värde av SES då det mäts i heterogena grupper. Detta in-

nebär att då SES används som kontrollvariabel i sambandsstudier försämras modellenpassningen vilket i sin tur försvårar tolkningen av resultaten. Fyra observerade variabler på elevnivå användes som indikatorer av SES; moderns och faderns utbildningsnivå, elevens studieambitioner samt antalet böcker i hemmet. Att dessa indikatorer är klassiska var delvis en anledning till att de testades, men bristen på andra lämpliga variabler var en annan orsak. Allmänt kan reliabiliteten ifrågasättas i uppgifter som lämnas av elever angående föräldrars utbildningsnivå. Vad gäller deras egna uppgifter om studieambitioner finns det däremot ingen anledning att ifrågasätta dessa. Antalet böcker i hemmet är kanske mer tveksamt om elever kan uppge, men skalningen av variabeln är gjord på ett sätt som ökar reliabiliteten då den består av kategorier med olika antal bokhyllor i hemmet. De indikatorer som orsakade brist på mätinvarians var moderns utbildningsnivå och antalet böcker i hemmet. Att utesluta dessa var inte möjligt eftersom det inte fanns andra lämpliga indikatorer att ersätta dem med. En alternativ tänkbar variabel, dock inte tillgänglig i TIMSS-data, skulle kunna vara familjens inkomster. I Sverige är emellertid inte denna indikator starkt korrelerad med exempelvis föräldrarnas utbildningsnivå (OECD, 2007). Föräldrarnas yrke skulle kunna vara en annan, vilken är relaterad till både utbildning och ekonomi och på så sätt indikerar familjens kulturella status (Sirin, 2005). Men om denna senare variabel är valid i klasser med många elever med migrationsbakgrund är tveksamt.

I delstudie III som genomfördes med tvånivå strukturell ekvationsmodellering var resultaten delvis i linje med hypotesen att undervisningsansvar påverkar gruppernas prestationsnivåer på ett positivt sätt samt att det finns ett samband mellan gruppammansättning och undervisningens utformning. Den interna validiteten påverkades givetvis av de resonemang som är förda ovan. Några av de reservationer som gjordes angående validiteten i de tre dimensionerna av undervisningsansvar bekräftades när modellen operationaliserades i denna förklaringsmodell. Den första dimensionen av undervisningsansvaret var teoretiskt tolkningsbar medan det fanns tveksamheter vad gällde de två övriga dimensionerna. Dessa speglade mera gruppammansättningarna med avseende på SES och språkkompetens vilket skulle kunna ha att göra med de brister i indikatorer som jag diskuterat tidigare. Det skulle även kunna bero på metodologiska brister ty de interaktionseffekter som kan finnas lyckades jag inte fånga genom att endast spegla två nivåer i analysmodellen, elev- och gruppnivå. Om det hade varit möjligt att införliva även skolnivån, vilket det i dagsläget inte är, skulle effekterna av undervisningsdimensionerna ha kunnat särskiljas mellan undervisningsfaktorn och olika differentieringsfaktorer, exempelvis skolegregation och nivågruppning.

Den höga korrelationen mellan modellens oberoende förklaringsfaktorer (0.51-0.78) medför svårigheter att separat skatta deras olika effekter (Cohen, Cohen, West, & Aiken, 2003). Denna multikolaritet kan ha sin grund i metod-effekter vid mätning av de olika indikatorerna. Enkätfrågor kan leda till svar som förutom personernas egna uppfattningar också speglar så kallat ”politiskt korrekta svar”. Detta tenderar till en likriktning i svaren med minskad varians i variablerna. De tre faktorerna representerar inte heller oberoende dimensioner av undervisningsansvar, utan de representerar dimensioner av ansvar för matematikundervisningen som är korrelerade med varandra. Detta ligger i de latenta faktorernas natur, de representeras av olika dimensioner vilka alla har en relation till det begrepp de företräder. Således är de korrelerade och inte polariserade (Hox, 2002). Ett sätt att minska påverkan från ovidkommande inflytande över korrelationen mellan variablerna skulle kunna vara att använda fler datakällor än vad som är gjort i denna studie. I min studie har jag tampats med den här typen av multikolaritetsproblem vilket bland annat lett till att modellerna förenklats och att analyserna genomförts med en variabel åt gången i stället för att simultant belysa allas effekt på prestationerna.

Till sist skall jag kommentera kausaliteten i studien. Går det över huvud taget att dra kausala slutsatser av de resultat som presenterats? Har undervisningsansvaret positiva effekter på gruppernas prestationer? Eller är det så att grupper med höga prestationer inspirerar till att utöva den formen av undervisning? Denna form av omvänd kausalitet som är ett stort hot mot valida kausala tolkningar är visserligen vanlig på elevnivå (Gustafsson, 2010a) men inte lika trolig på grupp-nivå då denna är indikerad av både lärar- och aggregerad elevdata. Att aggregera data är ett sätt att skydda sig mot omvänd kausalitet. Dessutom är skattade klassmedelvärden mer reliabla än elevsvar på enstaka enkätfrågor, konstaterar Gustafsson. Men trots att flernivå strukturell ekvationsmodellering erbjuder dessa möjligheter att motverka hoten mot valida kausala tolkningar så kan man inte kontrollera för alla tänkbara hot. Om exempelvis lärare har högre förväntningar på högpresterande elever, eller på elever med svensk bakgrund, är det tänkbart att de därför tar ett stort undervisningsansvar och stimulerar elevernas kunskapsbildning och likaså kan lärare tycka att det är problematiskt att ha sammanhållen undervisning i grupper med många lågpresterande elever vilket gör att de överlåter mer ansvar till eleverna själva. Genom tillgång till information om elevernas förkunskaper i matematik hade det varit möjligt att kontrollera för detta hot mot omvänd kausalitet. Likaså hade en longitudinell design kunnat undvika hoten. Min slutsats är att resultaten i de här studierna tyder på att det är högst troligt att det samband som noterats mellan den första dimensionen av

undervisningsansvaret och gruppernas prestationsnivåer beskriver ett kausalt samband, medan det för de två övriga dimensionerna inte förhåller sig så.

Implikationer

Om de didaktiska förutsättningarna utmärks av att eleverna själva får ta ett stort ansvar för lärprocessen i matematik har jag i den här avhandlingen visat att det leder till lägre prestationsresultat jämfört med då läraren tar detta ansvar. Jag har också visat att koncentrationen till vissa klasser av elever med låg språkkompetens och låg socioekonomisk status, bland annat orsakad av skolsegregation, också är relaterad till pedagogisk segregation. Matematikundervisningen i den svenska grundskolan kan därför inte sägas vara likvärdig, skolsegregation och pedagogisk segregation går hand i hand.

Matematikdidaktiska konsekvenser

Ett ökat läraransvar är inte liktydigt med kunskapsförmedlande matematikundervisning, då denna utgår från en syn på kunskap som något som kan kommuniceras över till eleverna. Läraransvar har i den här avhandlingen i stället definierats som lärarens ansvar för elevens lärprocess, vilket operationaliseras genom att läraren möjliggör interaktion och sociala aktiviteter och förklarar det matematiska innehållet samtidigt som eleven själv får konstruera sin kunskap (Brousseau, 1997; Vygotskij, 1997). Vissa inslag i detta teoretiska ramverk skulle kunna tolkas som förmedlande undervisning, exempelvis lärarens ansvar för att institutionalisera kunskaperna vilket bland annat innebär att läraren har ett socialt ansvar för att undervisa om allt som är nödvändigt kring ett kunskapsobjekt (Brousseau, 1997). Detta måste dock relateras till de övriga teoretiska utgångspunkterna vilka huvudsakligen handlar om elevens egen aktivitet och engagemang i lärprocessen. Exempelvis skall eleverna stimuleras till eget reflekterande och problemlösning i didaktiska situationer. Läraraktiviteten är emellertid viktig även i dessa processer, ty kunskapen behöver levandegöras och anpassas till elevens personliga erfarenheter samtidigt som svaren behöver transformeras till ett avkontextualiserat mer generellt objekt som är möjligt att förstå av andra utanför skolkontexten. Denna interaktion mellan lärare och elev är enligt Brousseau nödvändig för elevernas kunskapsutveckling. Ett ökat läraransvar är med dessa utgångspunkter inte detsamma som förmedlande undervisning där basmatematik och inte kreativ matematik med fokus på problemlösning och förståelse står i centrum. Att ta ansvar för elevers lärande innebär enligt dessa teoretiska utgångspunkter att läraren erbjuder förutsättningarna för elevens kunskapsbildning, inte att läraren har

makt att få eleven att lära sig. Även för de inslag som domineras av elevens eget ansvar har läraren det övergripande ansvaret.

De teoretiska utgångspunkterna och studiens olika resultat visar att den matematikundervisning som har potential att stödja elevers lärande präglas av ett komplext samspel mellan lärarens och elevens ansvar för olika delar av lärprocessen. Traditionella sätt att beskriva matematikundervisning, som exempelvis lärar- eller elevcentrerad, klarlägger inte dessa samspel. Av samma skäl kan inte heller katederundervisning eller eget arbete användas för att belysa det komplexa undervisningsansvaret. I den modell för undervisningsansvar som tagits fram i den här studien finns inslag som emellertid har likheter med de nämnda sätten att beskriva matematikundervisning. Lärarens verktyg för att eleverna skall utveckla sina matematikkunskaper och för att dessa skall bli generella och kommunicerbara är institutionalisering där lärarens undervisning och stöttning av elevernas lärande samt elevens egen aktivitet och konstruktion av kunskap är centrala inslag. Läraren har ett stort ansvar även för elevernas självständiga arbete där de skall kunna känna sig trygga i att uppgifterna är anpassade till deras förutsättningar och behov och att läraren kan rycka in och hjälpa till om det behövs. Om eget arbete i stället skulle kännetecknas av ett stort elevansvar för dessa delar riskerar lärmiljön att bli icke-didaktisk, som Brousseau kallar det, och man kan inte räkna med att kunskapen institutionaliseras. Benämningar som exempelvis katederundervisning och eget arbete säger inte något om hur ansvaret för lärprocessen är fördelat mellan lärare och elev. Genom att betrakta matematikundervisning utifrån de olika dimensioner av ansvar som analyserats i den här avhandlingen kan det komplexa spelet mellan lärare och elev lättare belysas.

I de fall matematikundervisning genomförs som förmedlande, eller överläter ett stort ansvar till eleverna, har ofta läroboken en central roll. Lärobokens utformning och innehåll kan i sin tur främja dessa undervisningsformer i stället för att utmana dem. Om undervisningen i stället organiseras och genomförs i enlighet med vad som diskuterats i den här avhandlingen kan läroboken komma att få rollen som ett stödande i stället för ett styrande redskap. Läroboken skulle då utgöra ett bland flera underlag för att institutionalisera matematikkunskapen och stödja elevernas språkutveckling. För att stimulera samtal, interaktion och skapa kognitivt och språkligt utmanande situationer behöver läraren fler redskap än bara läroboken.

Undervisningen görs likvärdig genom att anpassas till alla elevers behov av stöd för att utveckla sina matematikkunskaper. För alla elever, men i synnerhet för de som av olika skäl behöver extra stöttning, är det viktigt att läraren tar ansvar för de dimensioner av undervisningen som är beskrivna i den här avhand-

lingen. För elever med bristande kompetens i undervisningsspråket är lärarens förklaringar av ord och begrepp av särskilt stor betydelse. Likaså är dessa elevers möjligheter att utveckla sina språkkunskaper parallellt med matematikkunskaperna viktiga. För detta behöver undervisningsmiljön också erbjuda möjligheter till samtal, sociala aktiviteter och utmanande problem. Om inte matematikundervisningen erbjuder alla elever, oberoende av undervisningsgruppens sammansättning, sådan undervisning som präglas av dessa olika dimensioner av undervisningsansvar, kan elevers individuella förutsättningar i stället få ökad betydelse. Detta kan få konsekvenser både för prestationsnivåer och skillnader mellan olika elevgruppers kunskaper och möjligheter att senare i livet agera i olika sammanhang.

Implikationer för TIMSS-data

Fördelarna att använda data från TIMSS 2003 i den här avhandlingen har övervägt de nackdelar som framför allt handlat om brist på observerade variabler för att på ett valitt sätt kunna indikera olika teoretiska konstruktioner. Genom att utveckla utvärderingsinstrumenten i TIMSS-undersökningarna skulle flera av de brister som identifierats kunna avhjälpas. Det är främst inom två områden bristerna identifierats. Det ena området rör konsekvenser inom utbildningsområdet av den internationella migrationen, exempelvis stor andel flerspråkiga elever i undervisningsgrupperna (D. Coleman, 2006). Det andra området rör den internationella företeelsen med ökad decentralisering av ansvaret för utbildningen (Dovermark, 2004).

Eftersom undervisningsgrupper ofta är heterogena vad gäller elevernas migrationsbakgrunder kan andra än traditionella indikatorer behöva användas för att teckna kontextuella faktorer för SES eftersom de traditionella indikatorerna ofta är förknippade med vissa strukturella avvikelser mellan elevgrupperna. För att finna mer relevanta indikatorer krävs emellertid mera forskning. Genom ansvarsförskjutningen inom utbildningssystemet uppstår ett behov av variabler som bättre kan indikera denna förskjutning. I delstudie III framgår exempelvis att det saknas variabler för att indikera kvalitativa avvikelser mellan olika former av elevers eget arbete. Till viss del har denna brist på nyckelvariabler utgjort en begränsning i samtliga delstudier i denna avhandling.

Ytterligare ett exempel på önskvärda nyckelvariabler i TIMSS-data är information om elevernas förkunskaper i matematik. Med denna information hade det varit möjligt att kontrollera för detta inflytande över effekter av olika kontextuella variabler. Som framgår i delstudie III kan denna brist på information utgöra ett hot mot kausala tolkningar. Validiteten i vissa av undervisningsmodellens dimensioner är svag och detta kan härröra från interaktionseffekter med

variabler som inte är inkluderade i analyserna. Ytterligare ett exempel på information som skulle kunna bidra till ökad inre validitet är uppgifter om elevernas språkliga kompetenser. I det aktuella materialet finns endast uppgifter om hur länge eleverna varit i Sverige vilket kan utgöra ett alltför trubbigt mått på språkkompetens.

Förslag till fortsatt forskning

Att lärare arrangerar didaktiska situationer där de undervisar om allt som är nödvändigt kring ett kunskapsobjekt och samtidigt lämnar över ansvar för konstruktion av kunskap till eleven själv, dock under fortsatt stöd från läraren, visar sig ha positiva effekter på elevers prestationer i matematik. Att sådan matematikundervisning inte förekommer lika ofta i grupper med låg socioekonomisk nivå eller med stor andel elever med brister i undervisningsspråket tyder på att det finns pedagogisk segregation inom den svenska matematikutbildningen. En naturlig fortsättning av detta forskningsprojekt är därför att närmre analysera undervisningsdimensionernas betydelse för olika matematikområden med avseende på innehållsliga, kognitiva och språkliga aspekter. Även den differentierade betydelsen för olika elevgrupper med avseende på elevernas språkkompetens är intressant att undersöka. En annan fortsättning skulle kunna vara att studera vilka mekanismer som ligger bakom pedagogisk segregation. Kan det bero på bristande lärarkompetens, på lärares olika förväntningar på olika elevgrupperingar, på skilda sociala förutsättningar i undervisningsgrupperna, på förmodad språkproblematik eller på att lärare i stället medvetet väljer en annan didaktisk strategi? För att undvika brister relaterade till tvärsnittsdesign i forskningen, exempelvis hot mot kausala tolkningar, bör en sådan studie utformas som en longitudinell studie där man undersöker effekter av olika faktorer som antas orsaka pedagogisk segregation. Effekterna av dessa faktorer medieras då genom de olika dimensionerna av undervisningsansvaret. En lämplig design skulle kunna vara att vid två tillfällen mäta elevers matematikkunskaper. Med fördel kan det ena tillfället utgöras av ett nationellt provtillfälle, exempelvis i årskurs 6. Det andra provtillfället infaller ett år senare med ett uppföljande test. Under mellanliggande period mäts genom lärarenkäter och intervjuer lärarnas kompetens samt attitydfaktorer som exempelvis lärares förväntningar på elevgruppens prestationer, uppfattningar om olika sociala och språkliga faktorer påverkan på utformningen av undervisningen samt motiv till vald undervisningsstrategi. Undervisningsansvaret mäts både via elev- och lärardata. Enkäter och även observationer kan ligga till grund för variabler som skall indikera undervisningens utformning. Genom att använda flernivå strukturell ekvationsmodellering med latent variabler kan en medieringsmodell analyseras. I en tvånivåmodell där man kontrollerar

rar för individuella bakgrundsfaktorer och förkunskaper kan påverkan från såväl gruppammansättning som lärarkompetens och lärarattitydfaktorer på både undervisning och prestationer analyseras.

En sådan undersökning skulle ha potential att förklara de mekanismer som orsakar pedagogisk segregation i matematikundervisningen och därmed ge underlag för både intern skolutveckling och kompetensutveckling av lärare.

Slutsats

Under den period som matematikprestationerna försämrats i Sverige har arbetsformer där eleverna förväntas ta ett stort ansvar för sitt eget lärande varit vanliga. I de studier som gjorts inom ramen för denna avhandling uppvisas ett negativt samband mellan elevansvar för stora delar av lärprocessen och matematikprestationerna. Resultaten visar också att undervisningsgruppernas sammansättning förutom att vara relaterade till prestationsnivåer även är relaterade till hur ansvaret för elevernas lärande gestaltas i matematikundervisningen. Undervisningsgrupper med stor andel elever med låg socioekonomisk status eller med förväntat svaga språkkompetenser har förutom lägre prestationsresultat även mer sällan än andra grupper sådan matematikundervisning som utmärks av att läraren tar ett stort undervisningsansvar. Detta trots att mycket tyder på att dessa elever är i särskilt stort behov av lärarstöd för sin kunskapsutveckling. Elevers förutsättningar att klara sina studier är därför inte likvärdiga. Genom att visa att ett minskat läraransvar och pedagogisk segregation kan vara orsaker till försämrade matematikresultat indikeras samtidigt att det finns en potential till förbättring av den svenska matematikundervisningen.

SUMMARY

Introduction

The background to this thesis is my interest in mathematics teaching which has evolved during my time as mathematics teacher in primary and secondary schools, and during my time as a teacher educator. An important part of teaching is to strike a balance between the teacher's share of the responsibility for student's learning of mathematics and the student's own part of that responsibility, and also a balance of the ambition to put things right and explain the mathematical content to students and having students themselves think and problematize this content. An important part of the teaching profession is also to consider the various educational groups' different needs of scaffolding when these judgments are made. In this thesis the significance of this kind of balances for students' mathematics achievements are examined.

One reason for examining these balances in Sweden is that education has increasingly become a private and individualistic mission instead of a public one (Carlgren, et al., 2006). The responsibility for students' learning is through these changes shifted downwards in the system, which for example is expressed by the instructional mode "students' independent work", where the teacher's responsibility to a large extent has been handed over to the students (Skolverket, 2009b; Vinterek, 2006; Österlind, 1998). In parallel with this shift, the proportion of students with migrational background has grown in classes, the economic gaps have widened in the community, the residential segregation has increased and in addition, from both national and international perspectives there has been a deterioration of the mathematics results (Gustafsson & Yang Hansen, 2009; Skolverket, 2009b). For mathematics instruction to help impart students the tools to be democratic citizens and make free choices in life it is assumed that teaching is a counterforce to the negative influence of individual background factors (Nussbaum, 2000). Related to Nussbaum's theory of justice it has in this thesis been investigated how the shift of responsibility down to the students affects the teaching ability to create conditions and opportunities for all students to construct their own mathematics knowledge.

By contributing with knowledge in this area, my hope is that mathematics teachers and policy makers should have a better basis for planning of teaching and other issues related to mathematics education. This doctoral thesis has been prepared within the framework of the graduate school in educational science at the Centre for Educational and Teacher Research, University of Gothenburg, and the research topic is subject didactics.

The overall aim

The overall aim of this thesis is to shed light on how the mathematics performance of different multilingual classrooms is related to whether the responsibility for learning primarily is addressed to the teacher or to the students themselves. This is to clarify the role responsibility has in the teaching assignments to support students' construction of mathematics knowledge, with aim of creating equal education. Through theories of learning and teaching, and supported by empirical research, factors that illustrate important dimensions of responsibility for mathematics learning have been identified and related to students' performances. The role of weak skills in the instructional language for students with foreign background has been problematised, which further has had an influence on the analytical model designed.

Epistemological perspectives

The research approach in this study is secondary analysis of large scale data (Bos, 2002). This kind of approach is often characterized by focusing on general effects, being quantitative and by the researcher's distance from their research subjects (Cohen et al., 2007). Since I do not believe that any of these characteristics capture the essence of the theoretical frame of the current thesis, I have instead chosen to look upon it as a climate study (Gustafsson, 2008), which I base on the following argument. Results from a study are not general in themselves, but the generality depends on how they are interpreted and used in different contexts. Furthermore, a study is not quantitative only because the data used is quantitative, which Cohen, Manion och Morrison (2007) claim. The studies in this thesis are based on qualitative considerations in the formulation of hypotheses, design of analytical models, the selection of observed variables and in the analysis and interpretation of results. Nor do I think that closeness or distance to the object of research is crucial for a study's qualities, which Denzin and Lincoln (2005) states. Rather, one can by closeness or distance shed light on different aspects of an object (Gustafsson, 2008). A "climate study" may show global

structures, while a weather studies can view more detailed descriptions of specific weather conditions.

Background and theoretical framing

Over the past 20 years, school segregation has increased. In addition, international migration has led to an increasing proportion of students with foreign background in the Swedish school system. These changes have cumulatively resulted in more homogenous teaching groups with regard to socioeconomic factors and migrational background. Mathematics performance has during the same period deteriorated in general in Sweden, and for students with foreign background, the results have been lower than for other groups. Likewise, the students' socioeconomic background has increasingly come to affect performance. During the period the instructional mode "students' independent work" with an increasing emphasis on individual student responsibility for learning also has become common in mathematics education.

Against this background, it is of great interest to investigate the impact of mathematics teaching on students' opportunities to develop their mathematics skills. Theoretical perspectives to allow for the discernment of important aspects of responsibility in mathematics teaching has been that learning is seen as a process of interaction and that language is important for opportunities to reach more complex structures of knowledge (Cummins, 2000; Vygotskij, 1978), that the student's activity and self construction of knowledge will be regarded as a prerequisite for knowledge formation (Brousseau, 1997; Vygotskij, 1978) and that teacher's activity and engagement and scaffolding of the students is an important prerequisite for the development of knowledge (Brousseau, 1997; Cummins, 1984; Vygotskij, 1978). Results from empirical studies confirm the importance of guidance and scaffolding in the learning processes, interaction and discussion about the mathematical content and the opportunities for students to individually discuss and solve problems. For students with weak skills in the instructional language, these factors have been shown to be of particular importance, because these students will develop both their mathematics and language skills during their mathematics lessons.

This shows that there are many different dimensions of the concept of responsibility for students' learning which can be assumed to have influence on their access to knowledge in mathematics. Also the composition of the teaching groups is likely to have such influence, and moreover it can be assumed to be a link between the composition of the teaching groups and the teaching design. To conduct an empirical study of these hypothesized influences and relations, dif-

ferent dimensions of responsibility for students' learning first need to be identified and the concept of responsibility needs to be related to established models of mathematics teaching. One dimension of responsibility represents the responsibility to guide and support students in their processes towards more complex structures of knowledge, another can be identified as the responsibility for ensuring that students have the opportunity to construct their own knowledge and a third dimension represents the responsibility to highlight the mathematical content as objects of teaching. One can consider the responsibility for learning as positioned in two different poles, either directed to the teacher or the students.

“Student’s independent work” is characterized by all dimensions of responsibility being directed towards students themselves. This means that students get little scaffolding from the teacher in their learning processes. In traditional models of mathematics, teaching instruction is frequently referred to as either teacher- or student-centered, and this classification could lead to the polarization I described above. Teacher-centered teaching however, is characterized primarily by only one of those described dimensions of responsibility. In this model the teacher is assumed to explain procedures and provide instructions which means a transfer of knowledge to students (Hattie, 2009; Hiebert, et al., 2003). Such aspects of teaching, for example concerning interaction, language and mathematical reasoning is not prominent in this teaching model. The student-centered teaching, however, is more characterized by the second dimension described above, which means that student’s responsibility for the construction of their own knowledge is prominent in the model. Student-centered teaching also emphasizes aspects such as interaction and communication in the classroom (Ball & Bass, 2000; Boaler & Greeno, 2000). This model for describing teaching, which is also known as active learning (Hattie, 2009), certainly assumes that the teacher has an important role in staging of the students’ own activities and learning (Yackel, et al., 1990), although not explicitly illustrated.

In order to allow an investigation of the importance of mathematics teaching it will be necessary to first develop a teaching model that illustrates all those three dimensions of responsibility that are described above.

Study object, research questions and design

The aim is to illustrate the meaning of responsibility for students’ mathematics learning, and its impact on students’ knowledge construction in mathematics. In addition the aim is to shed light on if the composition of the teaching groups, with respect to students’ individual background factors, is related to how the re-

sponsibility for learning mathematics is expressed. The following questions have served as the basis of the investigations in the three sub studies:

1. What dimensions of the concept of responsibility for the students' learning can in the multilingual classroom be presumed to have influence over the students' access to knowledge in mathematics?
2. What effects do these different dimensions of responsibility have on the mathematics performances?
3. Is the composition of the teaching groups, related to students' social and linguistic backgrounds, important for the achievement levels in mathematics?
4. How is the relationship between group composition and responsibilities for the students' knowledge building in mathematics?
5. How is the validity of the control variable socioeconomic status affected when this is measured in teaching groups with students with different migration background?

The thesis includes three articles: (I) "Instructional responsibility in mathematics education: Modelling classroom teaching using Swedish data"; (II) "Measurement invariance of socioeconomic status across migrational background" and (III) "The meaning of mathematics teaching in multilingual classrooms: Analysing effects of responsibility for learning on achievement using Swedish data". The first study, described in Article I, covers the first research question above. An alternative measurement models for instructional responsibility is developed and validated against empirical data in TIMSS 2003, mathematics grade 8th. The second study, presented in Article II, deals with the fifth research question above. It is examined how measurement invariance in measurement models for socioeconomic status, SES, is affected when SES is being measured in groups with students with different migration background. The remaining research questions are examined in the third study, presented in Article III. The measurement models developed in the first two studies are used in the third study, where the effects of teaching and individual background factors on the students' mathematics performance are investigated.

Method and data

Data for the empirical investigations in this thesis comes from TIMSS 2003, Trends in International Mathematics and Science Study, conducted by IEA, the International Association for the Evaluation of Educational Achievement. The

data set includes descriptions of different levels of mathematics instruction, teacher and student descriptions and test results, which all together constitutes a relevant basis to describe teaching. Since the intraclass correlations for the variables in question were high, there is a need to conduct a multilevel analysis.

When the aim was to shed light on general patterns of relationships between mathematics instruction in multilingual classrooms and students' achievements, I had to use methods that take several levels of analysis into account, as well as complex relationships that exist between teaching and student performance and the other background factors that are related to both teaching and results. Analyses were conducted as latent variable analysis with multilevel modelling in a complex relational analysis (Cohen, et al., 2007). Multilevel Confirmative Factor Analysis (M-CFA) were used for the validation of the theoretically constructed factors (Brown, 2006; Hox, 2002). Multilevel Structural Equation Modelling (M-SEM) was used in the explanatory model when relations between contextual and individual background factors and students' achievements were analysed. By using the Mplus modeling program (Muthén & Muthén, 1998-2004) and the STREAMS modelling environment (Gustafsson & Stahl, 2005) it was possible to manage the complex data. This technique allows the specification of two-level models with latent variables, where both levels can be considered simultaneously. Manifest variables that indicate different dimensions of responsibility in mathematics instruction as well as the students' socio-economic background have been used. By a dummy variable the students were clustered into two groups according to whether they were born abroad or in Sweden and this was used to indicate students' language skills. A standardized general measure of performance in mathematics test was used in all three sub studies but in the third study the categorization of the results in the three cognitive categories knowing, applying and reasoning (Mullis, et al., 2005) was also used.

Summary of the studies

Study I

The aim of this study is to investigate the dimensionality of instructional responsibility supportive for students' knowledge construction of mathematics, as well as develop a model to illustrate these dimensions of responsibility. Unlike traditional models of mathematics teaching the model developed in this study simultaneously can highlight different dimensions of responsibility. The theoretical perspectives for distinguishing these dimensions have been that teacher's activity and engagement and scaffolding of the students is an important prerequisite for

the development of knowledge (Brousseau, 1997; Cummins, 1984; Vygotskij, 1978), while the pupil's activity and the construction of their own knowledge is regarded as another important condition (Brousseau, 1997; Vygotskij, 1978). The model covers three dimensions of responsibility: teacher's responsibility for offering valid conditions for students' mathematics learning, teacher's responsibility for initiating students to construct their own mathematics knowledge and teacher's responsibility for offering the specific mathematics content relevant to that grade instruction concerns. The model proved to have a potential to describe the Swedish mathematics teaching in grade 8 in accordance with the model's dimensions of responsibility. One consequence of these results is the potential of the model to further be used when investigating effects of "students' independent work" in the Swedish mathematics teaching.

Study II

The aim of this study is to investigate the measurement invariance for the construct SES when this is measured in teaching groups with students from different migration backgrounds, with the intent to obtain a measure that is valid when SES is used as a control variable in a structural model. Socioeconomic status (SES) is often measured in educational research when students' family background is to be used as a control variable. However, when measuring SES for such purposes, the indicators used must have the same meaning and structure for different migrational groups. The study shows that when a latent SES variable is indicated by a set of standard indicators it has the same meaning across subpopulations with Swedish and non-Swedish background. However, differences across groups in intercepts were found for some indicators, rejecting the assumption of scalar invariance, which is essential for estimation of differences in latent means between groups. Comparisons between models assuming different degrees of scalar invariance indicated, however, that models allowing partial scalar invariance should not be used when comparing latent variable means across groups of students with different migrational backgrounds.

Study III

The aim of this study is to investigate how the responsibility for students' knowledge construction of mathematics in multilingual classrooms is influencing students' performances and also to investigate the teaching equivalence in different group compositions. Overall, the study shows that if in particular the first dimension of responsibility is directed to the teacher instead of students, it is positively related to the achievements of the classes. This responsibility is also found to be particularly important for test tasks with linguistic dimensions,

which could indicate a particularly importance for students with weak skills in the language of instruction. The results also show that group composition is related to teaching design. The higher proportion of students born abroad, or with low socioeconomic status, the more likely it was that the responsibility for students' learning of mathematics was addressed to the students themselves rather than to the teacher. Furthermore, it was shown that the proportion of students with low socioeconomic status was negatively related to achievement levels, whereas the proportion of students born abroad had nothing to do with classes' performance levels.

Discussion and conclusion

During the same period as the mathematics performance has deteriorated in Sweden the instructional mode "students' independent work", where students are expected to take considerable responsibility for their own learning, has also been common. The results of the studies in this thesis show a negative relationship between independent work and mathematics performance. However, if the teaching is characterized by the teacher taking responsibility for guiding students, the groups are performing higher results. Moreover, group compositions are related to both achievements and teaching design. Classes with a high proportion of students with low socioeconomic status or with weak skills in the instructional language have lower performance results than other classes. Moreover, these classes have more rarely than others mathematics teaching that is characterized by teachers taking the major responsibility. Students in these classes can thus not be said to have equal conditions compared to the others to complete their studies. These results are in line with previous research results showing that effects of group composition are mediated by the teaching design (Dumay & Dupriez, 2007; Garrison, 2004; Opdenakker, et al., 2007; Thrupp, 1999; Weinert, et al., 1989). In order to achieve equivalent teaching there is considerable evidence that these classes rather need more support from a teacher than others, not less (Bruner, 2002; Cummins, 1984; Long, 1985; Setati & Adler, 2000; Vygotskij, 1978).

One surprising result is that the language factor's connection with performance is rather weak. Based on a lack of relevant indicators, this could probably be due to the shortcomings of the measure used for student's language skills. Other surprising findings are that SES does not explain different amounts of performance for students with foreign and with Swedish background, and that the variables used to indicate SES do not have different meanings and significance for different groups of students. The big difference, however, in the level of two of

the indicators, the mother's educational level and number of books in the home, turns out not to be managed by the estimation techniques available. A possible solution to this problem would be to use a different set of indicators than the traditional ones.

Because all correlations were controlled for the effects of socioeconomic and migrational background, there are grounds to believe that they reflect causal relationships. However, one should take into account certain threats that nevertheless may be against causality of the interpretations made. If it was possible to incorporate the school level as well, which in the current study is not possible, the effects of teaching could be distinguished between various differentiation factors as school segregation and ability groupings and the teaching factor. Although multilevel structural equation modelling is a method that effectively counteracts threats against causal interpretations, it can not be ruled that even at class level it may be a reverse causality. For example, by access to observed variables describing students' knowledge of mathematics it could be possible to control for differentiation effects likely to cause the weak link that is displayed between dimension two and three of instructional responsibility and performance. Also a different design of the study, for example a longitudinal study, could have been able to counter threats. My conclusion is that it is highly likely that the relation observed between the first dimension of instructional responsibility and group performance levels describes a causal relationship, while for the other two dimensions it is more doubtful.

One implication of the results of this thesis is to stimulate the development of mathematics teaching in which teachers are given opportunities to take the responsibility that is essential for students' knowledge of mathematics, namely the responsibility both to highlight, explain and correct mathematics content, but also responsibility for enabling students' own construction of their mathematical knowledge. Another implication of the results of this thesis is that it revealed areas where the empirical material collected in the TIMSS studies would need to be developed. One natural extension of this research is to more closely analyze the respective dimension's relevance to various mathematics content in terms of content, cognitive and linguistic aspects, but also meanings for groups of students with different language skills. Another natural extension is to study mechanisms underlying pedagogical segregation.

REFERENSER

- Adey, P., & Shayer, M. (1993). An exploration of long-term far-transfer effects following an extended intervention program in the high school science curriculum. *Cognition and Instruction*, 11(1), 1-29.
- Arnberg, L. (2004). *Så blir barn tvåspråkiga*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.
- Atweh, B., & Clarkson, P. (2002). *Globalisation and mathematics education: From above and below*. Paper presented at the Proceeding of Australian Association of research in Education, Brisbane, University of Queensland.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the national society for the study of education, constructivism in education* (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press.
- Barton, B., & Neville Barton, P. (2003). Language issues in undergraduate mathematics: A report of two studies. *New Zealand Journal of Mathematics*, 32(Supplement Issue), 19-28.
- Barwell, R. (2003). Patterns of attention in the interaction of a primary school mathematics student with English as an additional language. *Educational Studies in Mathematics*, 53(1), 35-59.
- Barwell, R. (2005a). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education*, 19(2), 117-125.
- Barwell, R. (2005b). Language in the mathematics classroom. *Language and Education*, 19(2), 96-101.
- Barwell, R., & Clarkson, P. C. (2004). *Researching mathematics education in multilingual contexts: Theory, methodology and the teaching of mathematics*. Paper presented at the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME, Bergen, Norway.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180.
- Boaler, J., & Greeno, J. G. (2000). Identity, agency and knowing in mathematical worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171-200). Westport, CT: Ablex.
- Bons, T. (2003). Ungdomar och framtidstro - en intervjuundersökning med gymnasieelever med invandrar-, flykting- och svensk bakgrund. In E.

- Franzén (Ed.), *Flyktingskapet i ett långsiktigt integrationsperspektiv*. Stockholm: FoU Södertörn.
- Bos, K. T. (2002). *Benefits and limitations of large-scale international comparative assessment studies: The case of IEA:s TIMSS study*. Enschede: University of Twente.
- Bourdieu, P. (1984). *Distinction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Bourdieu, P., & Passeron, J. C. (1990). *Reproduction in education, society and culture*. London: Sage.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990/ by Brousseau; edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield*. Dordrecht; London: KLUWER Academic Publishers.
- Brown, T. A. (2006). *Confirmatory factor analysis for applied research*. New York: The Guilford Press.
- Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, cop.
- Bruner, J. (1968). *Toward a theory of instruction*. New York: W.W. Norton.
- Bruner, J. (1971). *The relevance of education*. New York: Norton.
- Bruner, J. (1976). Learning how to do things with word. In J. Bruner & A. Garton (Eds.), *Human growth & development*.
- Bruner, J. (1982). The formats of language acquisition. *American Journal of Semiotics*, 1(3), 1-16.
- Bruner, J. (1983). *Child's talk: Learning to use language*. Oxford: Oxford University Press.
- Bruner, J. (1985). Vygotsky: A historical and conceptual perspective. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bruner, J. (2002). *Kulturens väv – utbildning i kulturpsykologisk belysning*. Göteborg: Daidalos.
- Bryman, A. (2004). *Social research methods*. New York: Oxford University Press.
- Cahan, S., Davis, D., & Staub, R. (2001). Age at immigration and scholastic achievement in school-age children: Is there a vulnerable age? *International Migration Review*, 35(2), 587-595.
- Carlgen, I., Klette, K., Myrdal, S., Schnack, K., & Simola, H. (2006). Changes in Nordic teaching practices: From individualised teaching to the teaching of individuals. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50(3), 301 - 326.
- Clarkson, P. C. (2007). Australian Vietnamese students learning mathematics: High ability bilinguals and their use of their languages. *Educational Studies in Mathematics*, 64(2), 191-215.
- Cliffordson, C., & Gustafsson, J. E. (2008). Effects of age and schooling on intellectual performance: Estimates obtained from analysis of continuous variation in age and length of schooling. *Intelligence*, 36(2), 143-152.
- Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., & Aiken, L. S. (2003). *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences (3rd Ed.)*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. London: Routledge Falmer.
- Coleman, D. (2006). Immigration and ethnic change in low-fertility countries: A third demographic transition. *Population and Development Review*, 32(3), 401-446.
- Coleman, J. S. (1988). Social capital in the creation of human capital. In C. Calhoun, J. Gerteis, J. Moody, S. Pfaff & I. Virk (Eds.), *Contemporary sociology theory* (pp. 110-116). Malden MA: Blackwell Publishing.
- Coleman, J. S., Campbell, E. Q., Hobson, C. J., McPartland, J., Mood, A. M., Weinfeld, F. D., et al. (1966). *Equality of educational opportunity*. Washington, DC: U.S. Government printing office.
- Collier, V. P., & Thomas, W. P. (2002). *A national study of school effectiveness for language minority students, long-term academic achievement*. Santa Cruz, CA: University of California, Centre for Research on Education, Diversity & Excellence.
- Cooper, B., & Harries, T. (2002). Children's responses to contrasting "realistic" mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 1-23.
- Cooper, B., & Harries, T. (2005). Making sense of realistic word problems: Portraying working class "failure" on a division with remainder problem. *International Journal of Research & Method in Education*, 28(2), 147-169.
- Cummins, J. (1984). *Bilingualism and special education: Issues in assessment and pedagogy*. San Diego, CA: College Hill Press.
- Cummins, J. (1996). *Negotiating identities: Education for empowerment in a diverse society*. Ontario: California Association for Bilingual Education.
- Cummins, J. (2000). *Language, power and pedagogy: Bilingual children in the crossfire*. Clevedon: Multilingual Matters.
- Cummins, J., & Swain, M. (1986). *Bilingualism in education*. New York: Longman.
- Davidenko, S. (2000). *Learning mathematics in English: ESL and non-ESL students' perspectives*. Syracuse: PhD thesis, Syracuse University.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2005). *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage, cop.
- Dewey, J. (2005). *Demokrati och utbildning*. Göteborg: Bokförlaget Daidalos.
- Dickens, W., & Flynn, J. (2001). Heritability estimates versus large environmental effects: The IQ paradox resolved. *Psychological Review*, 108(2), 346-369.
- Dovermark, M. (2004). *Ansvar - flexibilitet - valfrihet: En etnografisk studie om en skola i förändring*. Göteborg: Göteborg Studies In Educational Sciences 223, Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Dumay, X., & Dupriez, V. (2007). Accounting for class effect using the TIMSS 2003 eighth-grade database: Net effect of group composition, net effect of class process, and joint effect. *School Effectiveness and School Improvement*, 18(4), 383-408.

- Ellerton, N. F., & Clarkson, P. (1996). Language factors in mathematics teaching. In A. J. E. A. Bishop (Ed.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987-1034). Netherlands: Kluwe Academic Publishers.
- Elmeroth, E. (2006). Monokulturella studier av multikulturella elever: Att mäta och förklara skolresultat. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 11(3), 177-194.
- Florin, C., & Johansson, U. (2002). "Där de härliga lagrarna gro": Kultur, klass och kön i det svenska läroverket 1850-1914. Stockholm: Historiska institutionen, Stockholms universitet.
- Flynn, J. (1987). Massive IQ gains in 14 nations: What IQ tests really measure. *Psychological Bulletin*, 101(2), 171-191.
- Flynn, J. (2007). *What is intelligence?* Cambridge: Cambridge University Press.
- Garrison, W. M. (2004). Profile of classroom practices in US public schools. *School Effectiveness and School Improvement*, 15(4), 377– 406.
- Gibbons, P. (2002). *Scaffolding language, scaffolding learning: Teaching second language learners in the mainstream classroom*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Gibbons, P. (2006). *Stärk språket stärk lärandet: Språk och kunskapsutvecklande arbetssätt för och med andraspråkselever i klassrummet*. Uppsala: Hallgren & Fallgren.
- Goldstein-Kyaga, K. (1995). *Pizzabagare eller pilot? Om studievelet bland ungdomar i multietniska skolor*. Stockholm: HLS.
- Granström, K. (2007). *Forskning om lärares arbete i klassrummet*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Grouws, D. A. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan cop.
- Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S., & Turmo, S. (2004). Hva i all verden har skjedd i realfagene? Resultat fra TIMSS 2003. Oslo: Oslo Universitet, Utdanningsvitenskapelige fakultet.
- Gustafsson, J. E. (1998). Social background and teaching factors as determinants of reading achievement at class and individual levels. *Journal of Nordic Educational Research*, 18(4), 241-250.
- Gustafsson, J. E. (2003). What do we know about effects of school resources on educational results? *Swedish Economic Policy Review*, 10, 77-110.
- Gustafsson, J. E. (2006). *Lika rättigheter- likvärdig utbildning? En sammanfattning av studien barns utbildningssituation – bidrag till ett kommunalt barnindex*. Stockholm: Rädda barnen förlag.
- Gustafsson, J. E. (2007). Understanding causal influences on educational achievement through analysis of differences over time within countries. In T. Loveless (Ed.), *Lessons learned: What international assessments tell us about math achievement* (pp. 37-63). Washington, DC: The Brookings Institution.
- Gustafsson, J. E. (2008). Effects of international comparative studies on educational quality on the quality of educational research. *European Educational Research Journal*, 7(1), 1-17.
- Gustafsson, J. E. (2010a). *Causal inference in educational effectiveness research: A comparison of three methods to investigate effects of homework on student's achievement*.

- Paper presented at the The second meeting of EARLI SIG 18, Centre for Educational Effectiveness and Evaluation.
- Gustafsson, J. E. (2010b). Longitudinal designs. In B. P. M. Creemers, L. Kyriakides & P. Sammons (Eds.), *Methodological advances in educational effectiveness research* (pp. 77-101). London: Taylor & Francis, Ltd.
- Gustafsson, J. E., & Stahl, P. A. (2005). *Using Mplus with Streams 3.0*. Mölndal: MultivariateWare.
- Gustafsson, J. E., & Yang Hansen, K. (2009). Resultatförändringar i svensk grundskola. In Skolverket (Ed.), *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola? Kunskapsöversikt om betydelsen av olika faktorer*. Stockholm: Skolverket.
- Hansson, Å. (2010). Instructional responsibility in mathematics education: Modelling classroom teaching using Swedish data. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 171-189.
- Hansson, Å., & Gustafsson, J. E. (2011). Measurement invariance of socioeconomic status across migrational background. *Accepted for publication in Scandinavian Journal of Educational Research*.
- Hanushek, E. A., & Wössmann, L. (2006). Does educational tracking affect performance and inequality? Differences-in-differences evidence across countries. *The Economic Journal*, 116, 63-76.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. New York: Routledge.
- Hensvold, I. (2006). *Elevaktiva arbetsmodeller och lärande i grundskolan: En kunskapsöversikt*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., & Jacobs, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.
- Hox, J. (2002). *Multilevel analysis: Techniques and applications*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Hoxby, C. (2000). *Peer effects in the classroom: Learning from gender and race variation*. NBER Working Paper 7867.
- Hyltenstam, K. (1993). Att återerövra sin mänsklighet. In K. O. Arnstberg (Ed.), *Kultur, kultur och kultur – perspektiv på kulturmöten i Sverige*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Härnqvist, K. (1968). Relative changes in intelligence from 13 to 18. *Scandinavian Journal of Psychology*, 9, 50-82.
- Immigrantinstitutet. (2009). Migration, källa statistiska centralbyrån.
- Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Jamieson, J., Chappelle, C. A., & Preiss, S. (2004). Putting principles into practice. *ReCall*, 16(2), 396-415.

- Jencks, C., Smith, M., Acland, H., Bane, M. J., Cohen, D., Gintis, H., et al. (1972). *Inequality: A reassessment of the effect of family and school in America*. New York: Basic Books.
- Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: A classroom and curricular perspective*. Luleå University of Technology.
- Jäppinen, A. K. (2005). Thinking and content learning of mathematics and science as cognitional development in content and language integrated learning (CLIL): Teaching through a foreign language in Finland. *Language and Education* 19(2), 147-168.
- Knocke, W., & Hertzberg, F. (2000). *Mångfaldens barn söker sin plats. En studie om arbetsmarknadschanser för ungdomar med invandrabakgrund*. Stockholm: Svartvitts förlag.
- Latour, B. (1987). *Science in Action: How to follow scientists and engineers through society*. Cambridge, Ma.: Harvard University Press.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Leach, J., & Scott, P. (2003). Individual and sociocultural views of learning in science education. *Science & Education*, 12(1), 91-113.
- Lester, F. K. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. USA: National council of teachers of mathematics.
- Liedman, S. E. (2003). *I skuggan av framtiden. Modernitetens idéhistoria*. Viborg: Albert Bonniers förlag.
- Lindberg, I. (2004). Samtal och interaktion i ett andraspråksperspektiv. In K. Hyltenstam & I. Lindberg (Eds.), *Svenska som andraspråk: I forskning, undervisning och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Lindensjö, B., & Lundgren, U. P. (2002). *Utbildningsreformer och politisk styrning*. Stockholm: HLS Förlag.
- Lindqvist, G. (1999). *Vygotskij och skolan: Texter ur Lev Vygotskij's Pedagogisk psykologi kommenterade som historia och aktualitet*. Lund: Studentlitteratur.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Ljung, M. (2000). Utbildning i broschyrspråkets värld. In S. 200:47 (Ed.), *Mångfald i högskolan: Utredningen om social och etnisk mångfald i högskolan*. Stockholm: Utbildnings- och kulturdepartementet, Fritzes offentliga publikationer.
- Loehlin, J. C. (2004). *Latent variable models: An introduction to factor, path, and structural equation analysis*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Long, M. (1983). Native speaker/non-native speaker conversation in the second language classroom. *Applied Linguistics*, 4, 126-141.
- Long, M. (1985). Group work, interlanguage talk, and second language acquisition. *TESOL QUARTERLY*, 19(2), 207-228.
- Lundqvist, C. (2005). *Karriärvägar för ungdomar med utländsk bakgrund: Expertbilaga*. Norrköping: Integrationsverket.

- Mok, I. A. C., & Morris, P. (2001). The metamorphosis of the "virtuoso": Pedagogic patterns in Hong Kong primary mathematics classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 17(4), 455-468.
- Morgan, C. (2005). Words, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education*, 19(2), 102-116.
- Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(2/3), 189-212.
- Moschkovich, J. (2007). Using two languages when learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 64(2), 121-144.
- Mullis, I., Martin, M., & Foy, P. (2005). *IEA's TIMSS 2003 International report on achievement in the mathematics cognitive domains: Findings from a developmental project*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Muthén, B. O. (1994). Multilevel covariance structure analysis. *Sociological Methods & Research*, 22, 376-398.
- Muthén, B. O., & Muthén, L. K. (1998-2004). *Mplus user's guide* (3rd ed.). Los Angeles: Muthén & Muthén.
- Myrberg, E. (2006). *Fristående skolor i Sverige: Effekter på 9-10-åriga elevers läsförmåga*. Göteborg: Universitatis Gothoburgensis.
- Myrberg, E., & Rosén, M. (2006). Reading achievement and social selection in independent schools in Sweden: Results from IEA PIRLS 2001. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50(2), 185-205.
- Newman, D. A. (2009). Missing data techniques and low response rates: The role of systematic nonresponse parameters. In C. E. Lance & R. J. Vandenberg (Eds.), *Statistical and methodological myths and urban legends: Doctrine, verity and fable in the organizational and social science*. New York: Routledge, Taylor & Francis Group.
- Nussbaum, M. (2000). *Women and human development: The capabilities approach*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- Oakes, J. (1998). Tracking, detracking, and the politics of educational reform: A sociological perspective. In C. A. Torres & T. R. Mitchell (Eds.), *Sociology of Education: Emerging perspectives*. New York: State University of New York Press, Albany.
- OECD. (2003). *Trends in international migration*. Paris: OECD.
- OECD. (2007). *OECD science, technology and industry scoreboard 2007*. Paris: OECD.
- Olsen, R. V. (2005). *Achievement tests from an item perspective*. Oslo: Unipub AS.
- Opdenakker, M. C., & Van Damme, J. (2007). Do school context, student composition and school leadership affect school practice and outcomes in secondary education? *British Educational Research Journal*, 33(2), 179-206.
- Parszyk, I. M. (1999). *En skola för andra: Minoritetselevers upplevelser av arbets- och livsvillkor i grundskolan*. Stockholm: HLS.
- Pedhazur, E. J., & Pedhazur Schmelkin, L. (1991). *Measurement, design, and analysis: An integrated approach*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

- Phillips, D. C. (1995). The good, the bad, and the ugly: The many faces of constructivism. *Educational Researcher*, 24(7), 5-12.
- Piaget, J. (1968). *Strukturalismen*. Stockholm: Prisma.
- Piaget, J. (1984). *Språk och tanke hos barnet*. Malmö: Liber Förlag.
- Pimm, D. (1987). Who is we? *Mathematics Teaching*, 107, 39-42.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.
- Radford, L. (2007). *Towards a cultural theory of learning*. Paper presented at the CERME 5.
- Rendon, L. I. (1999). Toward a new vision of the multicultural community college for the next century. In K. M. Shaw, J. R. Valadez & R. A. Rhoads (Eds.), *Community colleges as cultural texts: Qualitative explorations of organizational and student cultures*. New York: SUNY Press.
- Riordain, M. N., & O'Donoghue, J. (2009). The relationship between performance on mathematical word problems and language proficiency for students learning through the medium of Irish. *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 43-64.
- Rönnerberg, I., & Rönnerberg, L. (2001). *Minoritetselever och matematikutbildning - en litteraturoversikt*. Stockholm: Skolverket. Dnr 01:617.
- Sahlström, F. (2008). *Från lärare till elever, från undervisning till lärande*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- SCB. (2007). *Barn, boendesegregation och skolresultat*. Statistiska centralbyrån.
- Schafer, J. L., & Graham, J. W. (2002). Missing data: Our view of the state of the art. *Psychological Methods*, 7(2), 147-177.
- Schneeweis, N., & Winter-Ebmer, R. (2007). Peer effects in Austrian schools. *Empirical Economics*, 32(2/3), 387-409.
- Seceda, W. (1992). Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics (NCTM)* (pp. 623-659). New York: Macmillan Publishing Company.
- Seceda, W. (1996). Urban students acquiring English and learning mathematics in the context of reform. *Urban Education*, 30(4), 422-448.
- Seidel, T., & Shavelson, R. J. (2007). Teaching effectiveness research in the past decade: The role of theory and research design in disentangling meta-analysis results. *Review of Educational Research*, 77(4), 454-499.
- Sen, A. (1987). The standard of living. In G. Hawthorn (Ed.), *The standard of living*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Sen, A. (1988). The concept of development. In H. Chenery & T. N. Srinivasan (Eds.), *Handbook of development economics*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Setati, M. (2001). Reserching Mathematics Education and language in Multilingual South Africa. *Mathematics Educator*, 12 (2), 6-20.
- Setati, M. (2005). *Power and access in multilingual mathematics classrooms*. Paper presented at the 4:e International Mathematics Education and Society Conference, Brisbane, Australia.

- Setati, M., & Adler, J. (2000). Between languages and discourses: Language practices in primary multilingual mathematics classrooms in South Africa. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 243-269.
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.
- Shavit, Y., & Blossfeld, H. (1993). *Persistent inequality: Changing educational stratification in thirteen countries*. Boulder: Westview Press.
- Shayer, M., & Adhmi, M. (2007). Fostering cognitive development through the context of mathematics: Results of the CAME project. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 265-291.
- Silby, B. (2000). *Revealing the language of thought*. New Zealand: Department of Philosophy, University of Canterbury.
- Sirin, S. R. (2005). Socioeconomic status and academic achievement: A meta-analytic review of research. *Review of Educational Research*, 75(3), 417-453.
- Sjögren, A. (1993). *Här går gränsen: Om integritet och kulturella mönster i Sverige och medelhavsområdet*. Stockholm: Arena, Sveriges Invandrarinstitut och Museums skriftserie nr A:8.
- Skolinspektionen. (2009). *Undervisning i matematik: Utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*. Stockholm: Skolinspektionen.
- Skolverket. (2000). *Grundskolan: Kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket. (2002). *Flera språk - fler möjligheter: Utveckling av modersmålsstöd och modersmålsundervisning 2002*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2003a). *Lusten att lära - med fokus på matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2004). *Elever med utländsk bakgrund*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (Producer). (2005) Undervisning för elever med utländsk bakgrund och för nationella minoriteter. <http://www.skolverket.se/sb/d/139/a/846,2007.08.21>.
- Skolverket. (2006a). *Förslag till mål och riktlinjer för nyanlända elever. Redovisning av ett regeringsuppdrag*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2006b). *Vad händer med likvärdigheten i svensk skola?* Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2007). *Attityder till skolan 2006: Elevernas och lärarnas attityder till skolan*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2008a). Betyg och provresultat i grundskolan läsåret 2007/2008.
- Skolverket. (2008b). *TIMSS: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009a). *Skolverkets lägesbedömning 2009: Förskoleverksamhet, skolbarnsomsorg, skola och vuxenutbildning*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009b). *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola? Kunskapsöversikt om betydelsen av olika faktorer*. Stockholm: Skolverket.
- SOU 2010:95. (2010). *Se, tolka och agera: Allas rätt till en likvärdig utbildning*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

- Stigler, J., & Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction. *Phi Delta Kappan*, 79(1), 14-21.
- Stähle, Y. (2006). *Pedagogiken i tiden: Om framväxten av nya undervisningsformer under tidigt 2000-tal - exemplet Kunskapsskolan*. Stockholm: Lärarhögskolan i Stockholm.
- Sund, K. (2007). *Teachers, family and friends: Essays in economics of education*. Stockholm: Stockholms universitet, 2007.
- Svensson, A. (2001). Består den sociala snedrekryteringen? Elevernas val av gymnasieprogram hösten 1998. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 6(3), 161-172.
- Svensson, A. (2008). Har dagens tonåringar sämre studieförutsättningar? En studie av förskjutningar i intelligensresultat från 1960-talet och framåt. *Pedagogisk Forskning i Sverige* 13(4), 258-277.
- Szulkín, R., & Jonsson, J. (2007). *Ethnic segregation and educational outcomes in Swedish comprehensive schools*. Working paper. Stockholm: Swedish institute of social research and dept. of sociology.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken*. Stockholm: Bokförlaget Prisma.
- Sönnerhed, W. W. (2011). *Mathematics textbooks for teaching: An analysis of content knowledge and pedagogical content knowledge concerning algebra in mathematics textbooks in Swedish upper secondary education*. Gothenburg: University of Gothenburg.
- Thrupp, M. (1999). *Schools making a difference: Let's be realistic*. Buckingham, UK: Open University Press.
- Thrupp, M., Lauder, H., & Robinson, T. (2002). School composition and peer effects. *International Journal of Educational Research*, 37(5), 483-504.
- Tymms, P. (2004). Effect sizes in multilevel models. In I. Schagen & K. Elliot (Eds.), *But what does it mean? The use of effect sizes in educational research* (pp. 55-66). London: National Foundation for Educational Research.
- Wallin, E. (2002). Jämlikhet, likvärdighet och individer i undervisning. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 7(3), 200-209.
- Weinert, F., Schrader, F. W., & Helmke, A. (1989). Quality of instruction and achievement outcomes. *International Journal of Educational Research*, 13(8), 895-914.
- Wellros, S. (1998). *Språk, kultur och social identitet*. Lund: Studentlitteratur.
- White, K. R. (1982). The relation between socioeconomic status and academic achievement. *Psychological Bulletin*, 91(3), 461-481.
- Willms, J. D. (2010). School composition and contextual effects on student outcomes. *Teachers College Record*, 112, 2-4.
- Vinterek, M. (2006). *Individualisering i ett skolsammanhang*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling, forskning i fokus, nr 31. Liber.
- Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: Falmer Press.
- Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *The Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89-100.

- Vygotskij, L. (1926/1997). *The collected works of L.S. Vygotsky. Vol. 3: Problems of the theory and history of psychology*. Ed. by Rieber, R W and Wollock, J. New York and London: Plenum Press.
- Vygotskij, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Vygotskij, L. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotskij, L. (1997). *Educational Psychology*. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC.
- Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G., & Merkel, G. (1990). The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yang, Y., & Gustafsson, J. (2004). Measuring socioeconomic status at individual and collective levels. *Educational Research and Evaluation*, 10(3), 259-288.
- Zimmer, R. W., & Toma, E. F. (2000). Peer effects in private and public schools across countries. *Journal of Policy Analysis and Management*, 19(1), 75-92.
- Zimmerman, D. (2003). Peer effects on academic outcomes. Evidence from a natural experiment. *Review of Economics and Statistics*, 85(1), 9-23.
- Österlind, E. (1998). *Disciplinering via frihet: Elevers planering av sitt eget arbete* (Vol. 75). Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.

